Uzupełnienia, powtórzenie

Zestawienie zbieżności różnego rodzaju ciągów, szeregów i całek[413].

Definicja zbieżności ciągu		
Rodzaj ciągu	**Zapis**	**Definicja/Definicje**
Rzeczywisty ciąg liczbowy (a_n)	$a_n \to g$	$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \lvert a_n - g\rvert < \varepsilon$
Zespolony ciąg liczbowy (z_n)	$z_n \to g$	$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \lvert z_n - g\rvert < \varepsilon$
Zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego (f_n)	$f_n \rightrightarrows f$	$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \lVert f_n - f\rVert < \varepsilon$ $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{x\in D_f}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \lvert f_n(x) - f(x)\rvert < \varepsilon$
Zbieżność punktowa ciągu funkcyjnego (f_n)	$f_n \to f$	$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x\in D_f}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \lvert f_n(x) - f(x)\rvert < \varepsilon$ $\underset{x\in D_f}{\forall}\ f_n(x) \to f(x)$

Warunek konieczny zbieżności szeregu/całki		
Rodzaj szeregu/całki	**Warunek**	**Wniosek**
Rzeczywisty szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$	$a_n \not\to 0$	Szereg rozbieżny
Zespolony szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$	$z_n \not\to 0$	Szereg rozbieżny
Szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$	$\lVert f_n\rVert \not\to 0$	Szereg nie jest jednostajnie zbieżny
Całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ Założenie: f jest ciągła na $[1,\infty)$	$\underbrace{f(x) \to g}_{x\to\infty}$ $g \neq 0$	Całka jest rozbieżna
Całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ Założenie: f jest ciągła na $[1,\infty)$	$\underbrace{f(x) \not\to 0}_{x\to\infty}$	Nic nie wynika, całka może być zbieżna

[413] Całek niewłaściwych, rzecz jasna, bo tylko wtedy jest pytanie o zbieżność. W przypadku całek niewłaściwych w tabelkach pojawiają się również własności, o których wcześniej nie mówiliśmy (zbieżność bezwzględna, analogon szeregów naprzemiennych).

Zbieżność bezwzględna		
Rodzaj szeregu/całki	**Warunek**	**Wnioski**
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n\rvert < \infty$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\left\lvert\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right\rvert \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n\rvert$
Zespolony szereg liczbowy	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert z_n\rvert < \infty$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny $\left\lvert\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right\rvert \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lvert z_n\rvert$
Szereg funkcyjny	$\sum_{n=1}^{\infty} \lVert f_n\rVert < \infty$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ zbieżny jednostajnie $\left\lVert\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\rVert \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lVert f_n\rVert$
Całka $\int_a^b f(x)\,dx$ Założenia: $a,b \in [-\infty,\infty]$, $a<b$, f jest ciągła na $(a,\,b)$	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx < \infty$	Całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$

Szeregi i całki o wzorze potęgowym		
Szereg/całka	**Wykładnik**	**Zbieżność**
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$p \leqslant 1$	Szereg rozbieżny
	$p > 1$	Szereg zbieżny
$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$	$p \leqslant 1$	Całka rozbieżna
	$p > 1$	Całka zbieżna
$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$	$p \geqslant 1$	Całka rozbieżna
	$p < 1$	Całka zbieżna

Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego		
Rodzaj szeregu/ciągu	**Warunek**	**Wniosek**
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert \to g \in [0,1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to g \in (-1,1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\left\lvert\frac{z_{n+1}}{z_n}\right\rvert \to g \in [0,1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\frac{z_{n+1}}{z_n} \to g, \quad \lvert g\rvert < 1$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert \to g \in (1,\infty]$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to g, \quad \lvert g\rvert > 1$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\left\lvert\frac{z_{n+1}}{z_n}\right\rvert \to g \in (1,\infty]$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\frac{z_{n+1}}{z_n} \to g, \quad \lvert g\rvert > 1$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny
Rzeczywisty ciąg liczbowy	$\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert \to g \in [0,1)$	$a_n \to 0$
Zespolony ciąg liczbowy	$\left\lvert\frac{z_{n+1}}{z_n}\right\rvert \to g \in [0,1)$	$z_n \to 0$
Rzeczywisty ciąg liczbowy	$\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert \to g \in (1,\infty]$	$\lvert a_n\rvert \to \infty$
Zespolony ciąg liczbowy	$\left\lvert\frac{z_{n+1}}{z_n}\right\rvert \to g \in (1,\infty]$	$\lvert z_n\rvert \to \infty$
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} \to g \in [0,1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\sqrt[n]{\lvert z_n\rvert} \to g \in [0,1)$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny
Rzeczywisty szereg liczbowy	$\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} \to g \in (1,\infty]$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$\sqrt[n]{\lvert z_n\rvert} \to g \in (1,\infty]$	Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny
Rzeczywisty ciąg liczbowy	$\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} \to g \in [0,1)$	$a_n \to 0$
Zespolony ciąg liczbowy	$\sqrt[n]{\lvert z_n\rvert} \to g \in [0,1)$	$z_n \to 0$
Rzeczywisty ciąg liczbowy	$\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} \to g \in (1,\infty]$	$\lvert a_n\rvert \to \infty$
Zespolony ciąg liczbowy	$\sqrt[n]{\lvert z_n\rvert} \to g \in (1,\infty]$	$\lvert z_n\rvert \to \infty$

Szeregi naprzemienne i uogólnienia		
Rodzaj szeregu/całki	**Warunki**	**Wniosek**
Rzeczywisty szereg liczbowy	$a_n \searrow 0$	Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny
Zespolony szereg liczbowy	$a_n \searrow 0$ $\lvert z\rvert = 1,\ z \neq 1$	Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n a_n$ jest zbieżny
Całka niewłaściwa	$\underbrace{f(x) \searrow 0}_{x\to\infty}$	Całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\sin x\,dx$ jest zbieżna
Całka niewłaściwa	$\underbrace{f(x) \searrow 0}_{x\to\infty}$	Całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\cos x\,dx$ jest zbieżna

Kryterium porównawcze		
Rodzaj szeregu/całki	**Warunki**	**Wniosek**
Rzeczywisty szereg liczbowy	$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$
Rzeczywisty szereg liczbowy	$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$
Całka niewłaściwa	$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),\quad \int\limits_a^b g(x)\,dx < \infty$	$\int\limits_a^b f(x)\,dx < \infty$
Całka niewłaściwa	$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),\quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = \infty$	$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \infty$

A teraz dwa zadania związane z powyższymi tabelkami.

Przykład 112:
Dowieść, że całka niewłaściwa

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}\,dx$$

jest zbieżna.

Rozwiązanie:
Korzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej dla całek niewłaściwych oraz z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

$$\int\limits_1^{\infty} \left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}\right| dx \leqslant \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < \infty\,.$$

Przykład 113:

Jedna z własności umieszczonych w tabelkach mówi, że dla każdej funkcji nierosnącej $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ mającej w $+\infty$ granicę równą 0, całka

$$\int_1^\infty f(x)\sin x\,dx$$

jest zbieżna.

Udowodnić tę własność przy dodatkowym założeniu, że funkcja f jest różniczkowalna.

Wskazówka: Całkowanie przez części.

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\int_1^\infty f(x)\sin x\,dx = f(x)(-\cos x)\Big|_{x=1}^{\infty} - \int_1^\infty f'(x)(-\cos x)\,dx =$$

$$= \lim_{x\to\infty} f(x)(-\cos x) - f(1)(-\cos 1) + \int_1^\infty f'(x)\cos x\,dx\,.$$

Granica

$$\lim_{x\to\infty} f(x)(-\cos x)$$

istnieje i jest równa 0, co wynika z twierdzenia o trzech funkcjach i oszacowań

$$0 \leqslant |f(x)(-\cos x)| \leqslant f(x) \to 0 \quad \text{przy} \quad x\to\infty\,.$$

Natomiast całka

$$\int_1^\infty f'(x)\cos x\,dx$$

jest zbieżna na mocy kryterium zbieżności bezwzględnej oraz kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych [414]:

$$\int_1^\infty |f'(x)\cos x|\,dx \leqslant \int_1^\infty |f'(x)|\,dx = \int_1^\infty -f'(x)\,dx = -f(x)\Big|_{x=1}^{\infty} = -\underbrace{\lim_{x\to\infty} f(x)}_{=0} + f(1) = f(1)\,.$$

[414] Trzeba też zauważyć, że skoro f jest nierosnąca, to $f'(x)\leqslant 0$.