Ciągi i szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych

Jak już nietrudno się domyślić, ciągiem liczbowym o wyrazach zespolonych[372] będziemy nazywać ciąg $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, którego wyrazy z_n są liczbami zespolonymi. Zespolone szeregi liczbowe to te same obiekty, co ciągi zespolone, tylko inaczej podane[373].

Jak wiemy z doświadczenia, głównym pojęciem analizy związanym z wszelkiego rodzaju ciągami jest pojęcie zbieżności i granicy. Przypomnijmy więc definicję granicy ciągu liczbowego (o wyrazach rzeczywistych). Ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny do granicy g, jeżeli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} |a_n-g|<\varepsilon .$$

Intuicyjnie: dalekie wyraz ciągu mają być bliskie granicy. Za mechanizm uzależnienia dalekiego posunięcia się w ciągu stosownie do małości epsilona odpowiada układ kwantyfikatorów. Kluczowa jest możliwość określania bliskości dwóch liczb rzeczywistych[374] dzięki pomiarowi zwykłej geometrycznej odległości między liczbami na osi liczbowej. Odległością liczb x i y jest po prostu moduł ich różnicy: $|x-y|$. Skoro mamy miarę tego, jak bardzo dwie liczby się różnią, to możemy tę miarę wkomponować w definicję granicy ciągu liczbowego.

Będziemy mogli przenieść tę definicję na grunt liczb zespolonych, jeśli zgodzimy się co do tego, jak mierzyć odległości między liczbami zespolonymi. Ale tu chyba nie ma żadnego sporu, gdyż ze względu na interpretowanie liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny możemy po prostu przyjąć standardową odległość euklidesową, zgodnie z którą odległość liczb zespolonych jest modułem ich różnicy.

W konsekwencji przyjmiemy, że ciąg (z_n) jest zbieżny do granicy[375] g, jeżeli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} |z_n-g|<\varepsilon .$$

Widzimy, że definicja ta od definicji granicy ciągu rzeczywistego różni się tylko użyciem literki z innego końca alfabetu dla oznaczenia wyrazów ciągu. Nic dziwnego, skoro wartość bezwzględną liczby zespolonej oznaczamy tym samym symbolem, co w przypadku rzeczywistym, a sformułowanie *odległość jest modułem różnicy* nie zawiera bezpośredniego odniesienia do rodzaju liczb o jakich mówimy.

---

[372] Lub zespolonym ciągiem liczbowym.

[373] Jak zwykle szereg utożsamiamy z ciagiem jego sum częściowych. Terminologia się przenosi poza dwoma elementami:
• Co innego nazywamy wyrazem — w szeregu wyrazami nazywamy składniki, które dodawane tworzą wyrazy ciągu sum cześciowych.
• Inaczej zapisujemy granicę — w ciągu trzeba napisać ”lim”, w szeregu po prostu piszemy sumę nieskończenie wielu składników.

[374] W tym wypadku a_n oraz g.

[375] Oczywiście g jest liczbą zespoloną.

Nietrudno zgadnąć, że na podstawie tej definicji można przepisać większość torii zbieżności ciągów z przypadku rzeczywistego, a w szczególności:
• suma, różnica, iloczyn, iloraz[376] ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym i granica sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu ciągów jest odpowiednio sumą, różnicą, iloczynem, ilorazem granic,
• zmiana skończenie wielu wyrazów nie wpływa na zbieżność i granicę,
• $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$,
• jeżeli $|z| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$,
• jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |g|$.

Okazuje się też, że pojęcie granicy ciągów zespolonych pozornie się trywializuje w obliczu następującego twierdzenia:

Niech

$$z_n = x_n + y_n i\,,$$

gdzie x_n, y_n są liczbami rzeczywistymi. Wówczas ciąg zespolony (z_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy **obydwa**[377] ciągi rzeczywiste (x_n), (y_n) są zbieżne. W takim wypadku

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\cdot \lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

Innymi słowy, zbieżność ciągu zespolonego sprowadza się do zbieżności dwóch ciągów rzeczywistych: ciągu części rzeczywistych oraz ciągu części urojonych.

Ktoś może powiedzieć: To jak tak, to po co sobie zawracać głowę z całą tą terorią, skoro ciąg zespolony to tak naprawdę para ciągów rzeczywistych? Po co badać zbieżność ciągu zespolonego, skoro wyjdzie na to samo jak zbadamy dwa ciągi rzeczywiste? Okazuje się, że nie do końca tak jest. Struktura liczb zespolonych może być czasami bardzo pomocna, co najlepiej widać na następującym przykładzie:

Przykład 100:
Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\left(\frac{2+2i}{3}\right)^n+\left(\frac{8+4i}{9}\right)^{n^2}}{3+\left(\frac{12+12i}{17}\right)^{n^n}+\left(\frac{18+6i}{19}\right)^{n^{n^n}}}\,.$$

Rozwiązanie:
Ktoś chętny, aby rozłożyć wyrażenie pod znakiem granicy na część rzeczywistą i część urojoną? Nie sądzę. Natomiast wystarczy zauważyć, że wszystkie cztery liczby zespolone podnoszone do potęgi mają moduł miejszy od 1, a więc odpowiednie potęgi dążą do zera. W konsekwencji granica jest równa 5/3.

[376] W przypadku ilorazu musimy zadbać o to, aby do mianownika nie dostało się zero. W szczególności granica mianownika musi być niezerowa.
[377] Jeśli jeden z ciągów (x_n), (y_n) jest rozbieżny, to ciąg (z_n) jest rozbieżny niezależnie od zachowania drugiego z tych ciągów.

Jeśli chodzi o zespolone szeregi liczbowe, to z teorii szeregów rzeczywistych przenoszą się następujące kryteria zbieżności:

• **Warunek konieczny zbieżności:** Jeżeli $z_n \not\to 0$, czyli $|z_n| \not\to 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest **rozbieżny.**

• **Zmiana wyrazów:** Zmiana lub pominięcie skończenie wielu wyrazów nie wpływa na zbieżność szeregu, ale może wpłynąć na wartość jego sumy.

• **Dodawanie/odejmowanie szeregów:** Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ są zbieżne, to zbieżne są szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$ i przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} w_n .$$

• **Mnożenie przez stałą:** Jeżeli c jest liczbą zespoloną różną od zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n$. Jeśli te szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

• **Szereg geometryczny:** Jeżeli c jest liczbą zespoloną różną od zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| < 1$. W takim przypadku

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz^n = \frac{cz}{1-z} .$$

• **Zbieżność bezwzględna:** Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny i wówczas

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| .$$

• **Kryterium d'Alemberta:** Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = g \in [0, \infty]$, to:

W przypadku $g < 1$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny oraz $z_n \to 0$.

W przypadku $g > 1$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny oraz $|z_n| \to \infty$.

• **Kryterium Cauchy'ego:** Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = g \in [0, \infty]$, to konkluzja jak wyżej.

Przytoczymy też kryterium nie mające odpowiednika w teorii szeregów rzeczywistych:

• **Rozkład na części rzeczywistą i urojoną:** Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n i)$, gdzie x_n oraz y_n są rzeczywiste, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy **obydwa** szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ są zbieżne. Jak się można spodziewać, w przypadku szeregów zbieżnych zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n i)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}y_n\,.$$

Jest jeszcze jedno ważne kryterium. Ale powolutku. Z teorii liczbowych szeregów rzeczywistych znamy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych:

Jeżeli $a_n\searrow 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że w tym kryterium nie ma miejsca na liczby zespolone. Jednak okazuje się, że dopiero w liczbach zespolonych widać głębię tego kryterium. Trzeba sobie tylko wyjaśnić, czym jest liczba -1. Otóż jest to liczba o module 1 różna od 1.

Mamy więc:

• **Uogólnienie kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych:**

Niech w będzie taką liczbą zespoloną, że $|w|=1$ oraz $w\neq 1$. Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich zbieżnym do zera. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n w^n$$

jest zbieżny.

Przyjrzyjmy się następującym dwóm charakterystycznym przykładom.

Przykład 101:

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+i}{n^2+i}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozdzielamy szereg na część rzeczywistą i urojoną:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+i}{n^2+i}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+i)\cdot(n^2-i)}{n^4+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1+(n^2-n)\cdot i}{n^4+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^4+1}+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{n^4+1}\,.$$

Korzystając z kryterium porównawczego dowodzimy rozbieżności szeregu części rzeczywistych:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^4+1}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+0}{n^4+n^4}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty\,.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

Przykład 102:
Rozstrzygnąć zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+i}{n^3+i}\,.$$

Rozwiązanie:
Sposób I:

Rozdzielamy szereg na część rzeczywistą i urojoną:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+i}{n^3+i}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+i)\cdot(n^3-i)}{n^6+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+1+(n^3-n)\cdot i}{n^6+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+1}{n^6+1}+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-n}{n^6+1}\,.$$
Korzystając z kryterium porównawczego dowodzimy zbieżności obu składników[378]:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+1}{n^6+1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+n^4}{n^6+0}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-n}{n^6+1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-0}{n^6+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^6+1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^6+0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\infty\,.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.

Sposób II:

Zastosujemy kryterium zbieżności bezwzględnej oraz kryterium porównawcze:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n+i}{n^3+i}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^6+1}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n^2}}{\sqrt{n^6+0}}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty\,.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.

[378]Zauważmy, że w drugim składniku pomimo znaku ”–” wyrazy są nieujemne.

Przykład 103:
Obliczyć sumę szeregu zespolonego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} .$$

Dla których z ten szereg jest zbieżny?

Wykorzystać otrzymany wynik do obliczenia sumy szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} .$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$\frac{a+b\cos x}{c+d\cos x} ,$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:
Dany w zadaniu szereg jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1=1$ i ilorazie $q=z/2$, skąd wynika, że jego suma jest równa

$$\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{2}{2-z} ,$$

o ile $|z/2|<1$, czyli $|z|<2$, bo szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q|<1$.

Przyjmując $z=\cos x+i\sin x$, co daje

$$z^n=\cos nx+i\sin nx ,$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z^n}{2^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}=\operatorname{Re}\frac{2}{2-z}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{2}{2-\cos x-i\sin x}=\operatorname{Re}\frac{2\cdot(2-\cos x+i\sin x)}{(2-\cos x)^2+\sin^2 x}=\frac{2\cdot(2-\cos x)}{4-4\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}.$$

Zespolone szeregi potęgowe

Zespolonym szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n z^n ,$$

gdzie z_n są współczynnikami zespolonymi[379], natomiast z przebiega liczby zespolone.

Na razie traktujmy taki szereg jak zespolony szereg liczbowy z parametrem zespolonym z. Pytanie, jakie będziemy zadawać, to pytanie o obszar zbieżności takiego szeregu, czyli problem wyznaczenia zbioru tych liczb zespolonych z, dla których szereg jest zbieżny. Na początek rozwiążemy kilka zadań na wyznaczanie obszaru[380] zbieżności.

[379] Jednak często są to liczby rzeczywiste.
[380] Który to obszar, jak się przekonamy, jest kołem o środku w zerze. Ale o tym później.

Ogólne wskazówki są takie:

1° Najpierw stosujemy kryterium d'Alemberta (ewentualnie Cauchy'ego), aby wyznaczyć promień koła, w którym jest zbieżny szereg[381]. Ten krok niewiele się różni od analogicznej procedury w przypadku rzeczywistych szeregów potęgowych.

2° Następnie rozstrzygamy[382], w których punktach brzegu koła zbieżności szereg jest zbieżny. Do dyspozycji[383] mamy następujące trzy kryteria:

• **Warunek konieczny zbieżności[384]:** Jeżeli $w_n \not\to 0$, czyli $|w_n| \not\to 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ jest **rozbieżny.**

• **Zbieżność bezwzględna:** Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ jest zbieżny.

• **Uogólnienie kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych:**

Niech w będzie taką liczbą zespoloną, że $|w|=1$ oraz $w \neq 1$. Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich zbieżnym do zera. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$$

jest zbieżny.

Przykład 104:

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium Cauchy'ego (można też zastosować kryterium d'Alemberta) otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{z^{3n}}{(-8)^n \cdot n}\right|} = \frac{|z|^3}{8 \cdot \sqrt[n]{n}} \to \frac{|z|^3}{8}\,.$$

Jeżeli $|z|^3/8 < 1$, czyli $|z| < 2$, to dany szereg potęgowy jest zbieżny. Jeśli zaś $|z|^3/8 > 1$, czyli $|z| > 2$, to jest on rozbieżny.

Wobec tego promień zbieżności szeregu jest równy 2 i pozostaje zbadać zbieżność na okręgu ograniczającym koło zbieżności.

Niech więc $|z| = 2$. Wówczas dany szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-z^3/8\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n}\,,$$

gdzie $w = -z^3/8$ jest liczbą zespoloną o module 1.

[381] Czyli promień zbieżności.

[382] O ile nie rozstrzygnęliśmy tego w kroku **1°**.

[383] Inne kryteria wydają się tu mało użyteczne.

[384] Zmieniłem literkę z na w, aby nie używać z_n, które nieco wyżej są współczynnikami szeregu zespolonego.

Jeżeli $w \neq 1$, to powyższy szereg jest zbieżny zgodnie z uogólnieniem kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Natomiast dla $w=1$ otrzymujemy szereg harmoniczny, a więc rozbieżny.

Pozostaje rozwiązać równanie $-z^3/8=1$, czyli $z^3=-8$. Jednym z rozwiązań jest $z=-2$, a pozostałe dwa rozwiązania leżą na okręgu o środku w zerze i promieniu 2 w równych odległościach kątowych — mają argumenty $\pm\pi/3$.

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu 2 wraz z brzegiem oprócz trzech punktów: -2 oraz $1\pm\sqrt{3}i$.

Przykład 105:

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n}\,.$$

Podać w postaci kartezjańskiej liczby zespolone użyte do opisania obszaru zbieżności.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium Cauchy'ego (można też zastosować kryterium d'Alemberta) otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{z^{8n}}{16^n \cdot n}\right|} = \frac{|z|^8}{16\cdot \sqrt[n]{n}} \to \frac{|z|^8}{16}\,.$$

Jeżeli $|z|^8/16<1$, czyli $|z|<\sqrt{2}$, to dany szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeśli zaś $|z|^8/16>1$, czyli $|z|>\sqrt{2}$, to jest on rozbieżny.

Wobec tego promień zbieżności szeregu jest równy $\sqrt{2}$ i pozostaje zbadać zbieżność na okręgu ograniczającym koło zbieżności.

Niech więc $|z|=\sqrt{2}$. Wówczas dany szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{8n}}{16^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n}\,,$$

gdzie $w=z^8/16$ jest liczbą zespoloną o module 1.

Jeżeli $w \neq 1$, to powyższy szereg jest zbieżny zgodnie z uogólnieniem kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Natomiast dla $w=1$ otrzymujemy szereg harmoniczny, a więc rozbieżny.

Pozostaje rozwiązać równanie $z^8/16=1$, czyli $z^8=16$.

Jednym z rozwiązań jest $z=\sqrt{2}$, a pozostałe rozwiązania leżą na okręgu o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ w równych odległościach kątowych — mają argumenty $k\pi/4$ przy $k=1,2,\ldots,7$.

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ wraz z brzegiem oprócz ośmiu punktów: $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$ oraz $\pm 1 \pm_2 i$.

Przykład 106:

Wyznaczyć **promień**[385] zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot z^{n^2}}{(n!)^n} . \tag{1}$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (1) traktowanego jako zespolony szereg liczbowy z parametrem z.

Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^{n^2} \cdot z^{n^2}}{(n!)^n}\right|} = \left|\frac{n^n \cdot z^n}{n!}\right| = \frac{n^n \cdot |z|^n}{n!} = b_n .$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do rzeczywistego ciągu liczbowego (b_n).

Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |z|^n} = \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |z|}{(n+1)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot |z| \to e \cdot |z|$$

przy $n \to \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (b_n) równej $e \cdot |z|$.

Jeżeli $e \cdot |z| < 1$, czyli $|z| < 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta $b_n \to 0 < 1$, skąd na mocy kryterium Cauchy'ego szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |z| > 1$, czyli $|z| < 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta $b_n \to +\infty > 1$, skąd na mocy kryterium Cauchy'ego szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $1/e$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu zespolony szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.

[385] To znaczy, że nie trzeba rozstrzygać, co się dzieje na brzegu koła zbieżności.

Zobaczyliśmy kilka przykładów, w których wyznaczaliśmy obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego. W obliczeniach traktowaliśmy taki szereg jak zespolony szereg liczbowy z parametrem zespolonym z. Co prawda będziemy rozumieli, że w obszarze zbieżności takiego szerego można z jego sum skomponować funkcję zmiennej zespolonej z, ale o funkcjach zmiennnej zespolonej prawie nie będziemy mówić[386].

Jak można podejrzewać na podstawie dotychczasowych przykładów, obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze, a promień tego koła nazywamy promieniem zbieżności zespolonego szeregu potęgowego. W skrajnych sytuacjach koło zbeżności może być całą płaszczyzną zespoloną albo degenerować się do zbioru jednopunktowego złożonego z zera. Jeśli zaś promień zbieżności jest dodatni i skończony[387], to na okręgu będącym brzegiem tego koła mogą się dziać różne rzeczy: szereg może być zbieżny, szereg może być rozbieżny, szereg może być zbieżny w części punktów, a w częsci rozbieżny.

Wyjaśnia się natomiast zagadka, dlaczego w przypadku rzeczywistego szeregu potęgowego używaliśmy zwrotu *promień zbieżności* dla określenia połowy długości przedziału zbieżności. Mówienie o promieniu przedziału jest co najmniej dziwne[388]. Jednak rzeczywisty szereg potęgowy jest także zespolonym szeregiem potęgowym[389], który to szereg potęgowy ma obszar zbieżności będący kołem na płaszczyźnie zespolonej[390], a ograniczając się do prostej rzeczywistej widzimy tylko ślad tego koła w postaci przedziału. W konsekwencji promień zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego to promień koła, którego ten przedział jest średnicą.

[386]A dokładniej: pozwolimy sobie nazwać pewne funkcje czy też zapisać je wzorem, ale nie będziemy odnosić się do własności takich funkcji. Teoria takich funkcji jest niewyobrażalnie bogata i pełna fascynujących zjawisk. Na przykład: funkcja zespolona mająca pochodną w sensie zespolonym, ma pochodne wszystkich rzędów i jest sumą szeregu potęgowego; pewne całki rzeczywiste można obliczać całkując funkcje zespolone po krzywej okrążającej osobliwość (hasło: *residua*). Ale to, skromnie licząc, wymaga co najmniej semestralnego wykładu. Jeśli kogoś to interesuje, może w przyszłości (po zaliczeniu Analizy 3) zerknąć na wykład z nazwą w stylu: *Funkcje zespolone, Funkcje analityczne, Analiza zaspolona.*

[387]Czyli mamy prawdziwe geometryczne koło.

[388]Ja zwykle podaję, że mam 170 cm wzrostu a nie mówię, że mam promień 85 cm.

[389]Wystarczy bowiem zamienić literkę x na z i umówić się, że przebiega ona wartości zespolone.

[390]Mówienie o promieniu jest tu jak najbardziej na miejscu.

Dla ilustracji przedstawię[391] przykłady szeregów o charakterystycznych kołach zbieżności:

• **Cała płaszczyzna:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\,.$$

• **Zbiór jednopunktowy złożony z zera:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n\,.$$

• **Koło o środku w zerze i promieniu R bez brzegu:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{R^n}\,.$$

• **Koło o środku w zerze i promieniu R z brzegiem:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2\cdot R^n}\,.$$

• **Koło o środku w zerze i promieniu R z brzegiem bez punktu R:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot R^n}\,.$$

• **Koło o środku w zerze i promieniu 2 z brzegiem bez 3 punktów:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(-8)^n\cdot n}\,. \qquad \textbf{(przykład 104)}$$

• **Koło o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ z brzegiem bez 8 punktów:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{8n}}{16^n\cdot n}\,. \qquad \textbf{(przykład 105)}$$

• **Koło o środku w zerze i promieniu 1 z sieczką[392] na brzegu:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n3^n}}{n}\,.$$

[391] Bez wchodzenia w szczegóły dlaczego obszary zbieżności są takie jak podaję — w większości przypadków jest to łatwe ćwiczenie.

[392] To znaczy, że na okręgu o promieniu 1 szereg jest zbieżny na gęstym zbiorze i rozbieżny na gęstym zbiorze.

Teraz zajmiemy się jednym szczególnym szeregiem potęgowym, a mianowicie szeregiem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

zbieżnym na całej płaszczyźnie zespolonej. Ponieważ współczynniki tego szeregu są liczbami rzeczywistymi, możemy rozważać ten szereg na prostej rzeczywistej jako rzeczywisty szereg potęgowy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jak wiemy, sumą tego szeregu jest funkcja wykładnicza:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Podsumujmy więc: mamy szereg potęgowy, który jest zbieżny zarówno dla argumentow rzeczywistych jak i zespolonych. I mamy funkcję, która ma sens tylko dla argumentów rzeczywistych[393]. Ta funkcja i suma tego szeregu są równe dla argumentów rzeczywistych. Skoro tak, to naturalnym wydaje się, aby ową funkcję rozszerzyć na całą płaszczyznę zespoloną przyjmując jako jej definicję sumę owego szeregu potęgowego:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Tak zdefiniowana funkcja wykładnicza na płaszczyźnie zespolonej spełnia dla każdych liczb zespolonych z_1, z_2 równość

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

gdyż własność ta może być udowodniona na gruncie formalnego mnożenia szeregów potęgowych poprzez udowodnienie[394] równości:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}.$$

To może posłużyć do wyprowadzenia bardziej praktycznego wzoru na e^z, bo trudno sobie wyobrazić, abyśmy do obliczeń każdorazowo używali szeregu. Jeżeli $z=x+yi$, gdzie x, y są liczbami rzeczywistymi, to

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}.$$

Czym jest e^x, to rozumiemy. A czym jest tajemnicze e^{yi}? Nie ma wyjścia, ten jeden raz musimy użyć szeregu, bo innego punktu zaczepienia nie mamy. Otrzymujemy[395]

$$e^{yi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yi)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}}_{=\cos y} + i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\sin y} = \cos y + i \cdot \sin y.$$

[393] Bo na gruncie naszej dotychczasowej wiedzy nie widać jak nadać sens np. wyrażeniu e^i.

[394] Nie jest to trudne, wystarczy bowiem przekonać się, że po obu stronach równości jednomian $z_1^k z_2^m$ występuje z takim samym współczynnikiem. Nie bawię się w to jednak, bo nie jest to w tej chwili najważniejsze.

[395] Jak zwykle: jeśli nie posługujesz się biegle znakiem $\sum$, rozpisz sobie te sumy z kropeczkami.

W konsekwencji otrzymujemy wzór

$$e^{x+yi}=e^{x}\cdot(\cos y+i\cdot\sin y)\ .$$

Widzimy więc, że za wartość bezwzględną liczby e^z odpowiada część rzeczywista liczby z, natomiast argument liczby e^z jest częścią urojoną liczby z.

Powyższy wzór wyjaśnia, skąd się wziął zapis e^{yi} używany czasem jako skrót[396] dla napisu $\cos y+i\cdot\sin y$.

Przy okazji wyjaśniło się też, co oznacza wzór $e^{i\pi}+1=0$, który zapewne podpatrzyliście u Krasnala Matematyka.

Morał stąd jest następujący: Jeżeli mamy dobrze znaną[397] funkcję zmiennej rzeczywistej, która to funkcja jest sumą szeregu potęgowego, to można tę funkcję rozszerzyć na płaszczyznę zespoloną[398]. Oczywiście nie dotyczy to np. funkcji wymiernych, bo te bez żadnej łaski sobie interpretujemy dla liczb zespolonych.

A oto kilka tego typu przykładów[399].

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad z\in\mathbb{C}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad z\in\mathbb{C}$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} z^{n}}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq -1$$

$$\operatorname{arctg} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq \pm i$$

Na szczególną uwagę zasługuje logarytm, który okazuje się być funkcją odwrotną[400] do funkcji wykładniczej, a w związku z tym może być obliczany według wzoru[401]:

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z\,.$$

[396]Póki nie mamy zdefiniowanej funkcji wykładniczej dla argumentów zespolonych, to e^{yi} można uważać tylko za dziwny skrót.

[397]I najlepiej: jakoś nazwaną.

[398]Może nie całą, może tylko na jakieś koło o środku w zerze.

[399]Jak widać przykłady te sprowadzją się do zapisania funkcji rzeczywistej w postaci rzeczywistego szeregu potęgowego i zamianie literki x na z. Dla porządku trzeba też określić koło zbieżności szeregu potęgowego.

[400]To, że jest funkcją odwrotną znowu wynika z pewnych tożsamości formalnych na szeregach potęgowych. Podany szereg potęgowy definiuje logarytm tylko w pewnym kole. Jednak logarytm jako funkcję odwrotną do wykładniczej można zdefiniować na całej płaszczyźnie zespolonej bez zera. Jednak taka definicja nie jest jednoznaczna, bo funkcja wykładnicza nie jest różnowartościowa, np. $e^0=e^{2\pi i}$. Ale takie są uroki funkcji zmiennej zespolonej i oczywiście nie będę w to wchodzić głębiej.

[401]Zauważ, że logarytm ma tu argument z, a we wzorze powyżej ma argument $1+z$.

Przykład 107:
Wyprowadzić wzory na sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}\,.$$

Wskazówka: $z=\cos x+i\cdot\sin x$.

Rozwiązanie:

Wstawiając

$$z=\cos x+i\cdot\sin x$$

do wzoru

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

i pamiętając, że

$$z^n=\cos nx+i\cdot\sin nx\,,$$

otrzymujemy

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx+i\cdot\sin nx}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}+i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}\,.$$

Z kolei zastosowanie wzoru

$$e^{a+bi}=e^a\cdot(\cos b+i\cdot\sin b)$$

dla $a=\cos x$ oraz $b=\sin x$ prowadzi do

$$e^z=e^{\cos x+i\cdot\sin x}=e^{a+bi}=e^a\cdot(\cos b+i\cdot\sin b)=e^{\cos x}\cdot(\cos\sin x+i\cdot\sin\sin x)=$$
$$=e^{\cos x}\cdot\cos\sin x+i\cdot e^{\cos x}\cdot\sin\sin x\,.$$

Wobec tego

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}}_{\text{rzeczywiste}}+i\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}}_{\text{rzeczywiste}}=\underbrace{e^{\cos x}\cdot\cos\sin x}_{\text{rzeczywiste}}+i\cdot\underbrace{e^{\cos x}\cdot\sin\sin x}_{\text{rzeczywiste}}\,,$$

skąd

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cdot\cos\sin x$$

oraz[402]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=e^{\cos x}\cdot\sin\sin x\,.$$

[402]Składnik odpowiadający $n=0$ jest zerem, więc go pomijamy.

Przykład 108:

Podać wartości całek (bez wykonywania całkowania !!!):

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\sin\sin x\,dx\,, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\cos\sin x\,dx\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\cos\sin x\cdot\cos nx\,dx\,, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\cos\sin x\cdot\sin nx\,dx\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\sin\sin x\cdot\cos nx\,dx\,, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\sin\sin x\cdot\sin nx\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Z poprzedniego zadania wiemy, jakie są szeregi Fouriera zdefiniowanych poniżej funkcji f oraz g

$$f(x)=e^{\cos x}\cdot\cos\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

oraz

$$g(x)=e^{\cos x}\cdot\sin\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)\ .$$

Z przyrównania powyższych szeregów trygonometrycznych wnioskujemy, że odpowiednie współczynniki są równe:

$$a_0=1\,, \qquad a_n=\frac{1}{n!}\,, \qquad b_n=0\,, \qquad c_0=c_n=0\,, \qquad d_n=\frac{1}{n!}\,.$$

Wobec tego ze wzorów na współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy[403]:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\sin\sin x\,dx=\int_0^{2\pi} g(x)\,dx=2\pi\cdot c_0=0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\cos\sin x\,dx=\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=2\pi\cdot a_0=2\pi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\cos\sin x\cdot\cos nx\,dx=\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx=\pi\cdot a_n=\frac{\pi}{n!}\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\cos\sin x\cdot\sin nx\,dx=\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx=\pi\cdot b_n=0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\sin\sin x\cdot\cos nx\,dx=\int_0^{2\pi} g(x)\cdot\cos nx\,dx=\pi\cdot c_n=0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\sin\sin x\cdot\sin nx\,dx=\int_0^{2\pi} g(x)\cdot\sin nx\,dx=\pi\cdot d_n=\frac{\pi}{n!}\,.$$

[403] Trzy całki równe 0 są całkami z funkcji nieparzystej, a przedział całkowania można przesunąć do $(-\pi,\pi)$, więc w tych przypadkach obeszlibyśmy się bez szeregów Fouriera.

Przykład 109:
Obliczyć
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}$$
przyglądając się na wszystkie strony $\ln(1+i)$.

Rozwiązanie:
Zgodnie ze wzorem
$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot z^n}{n}$$
zastosowanym do $z=i$ otrzymujemy
$$\ln(1+i)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot i^n}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+2}\cdot i^{2k+1}}{2k+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}\cdot i^{2k}}{2k}=$$
$$=i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}\,.$$

Z kolei wzór
$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z$$
zastosowany do $z=1+i$ daje
$$\ln(1+i)=\ln|1+i|+i\cdot\arg(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\ln 2}{2}+i\cdot\frac{\pi}{4}\,.$$

Wobec tego
$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}=\frac{\ln 2}{2}+i\cdot\frac{\pi}{4}\,,$$
skąd
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln 2$$
oraz
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}=\frac{\pi}{4}\,.$$

Przykład 110:
Przytoczony wcześniej zespolony szereg potęgowy
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n\cdot 3^n}}{n}$$
w punktach postaci $z=e^{k\pi i/3^m}$, gdzie $m\in\mathbb{N}$ oraz $k\in\mathbb{Z}$, jest zbieżny albo rozbieżny[404] w zależności od parzystości k.

Zadanie dotyczy jednak zbieżności tego szeregu w punkcie na okręgu jednostkowym, który to punkt jest innej postaci niż powyższa.

Obliczyć sumę tego szeregu dla $z=i$.

Przypomnienie:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}\,.$$

Rozwiązanie:
Dla $z=i$, po uwzględnieniu[405] $i^a=i^b$ dla $a\equiv b\,(\mathrm{mod}\ 4)$, dany szereg przyjmuje postać[406]
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n\cdot 3^n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{2n\cdot 3^{2n}}}{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{(2n+1)\cdot 3}}{2n+1}=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{6n+3}}{2n+1}=-\frac{\ln 2}{2}-i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi i}{4}\,.$$

Odpowiedź: Dla $z=i$ suma danego szeregu jest równa $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi i}{4}$.

[404]To tylko tak dla informacji, bo do rozwiązania zadania to nie jest przydatne.

[405]Uwzględniamy to tak, że $3^{2n+1}\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)$, skąd $i^{3^{2n+1}}=i^3$. Można też wyjść od $i^9=i$, a następnie przez $i^{9^n}=i$ dojść do $i^{3^{2n+1}}=i^3$.

[406]Pierwsza równość to rozbicie sumy na dwie sumy: w pierwszej znajdują się składniki o indeksach parzystych, a w drugiej o nieparzystych. Przy okazji zmienia się znaczenie zmiennej n. Jeśli wolisz, możesz sobie wyobrazić równość
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n\cdot 3^n}}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{2k\cdot 3^{2k}}}{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{(2k+1)\cdot 3^{2k+1}}}{2k+1}\,,$$
gdzie w pierwszej sumie przyjmujemy $n=2k$, a w drugiej $n=2k+1$.

Przykład 111:

Przyjrzyjmy się szeregowi potęgowemu logarytmu:

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq -1$$

dla wygody[407] przepisanemu w postaci

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

Szereg ten na okręgu jednostkowym jest zbieżny poza punktem 1. Przyjrzyjmy się szeregom trygonometrycznym, których ślad możemy zobaczyć na okręgu jednostkowym.

Wstawiając do rozważanego szeregu $z=\cos x+i\cdot\sin x$ otrzymamy kolejno:

$$-\ln(1-\cos x-i\cdot\sin x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x+i\cdot\sin x)^n}{n},$$

$$-\ln|1-\cos x-i\cdot\sin x|-i\cdot\arg(1-\cos x-i\cdot\sin x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\ln(2-2\cos x)-i\cdot\operatorname{arctg}\frac{-\sin x}{1-\cos x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

skąd

$$-\frac{1}{2}\cdot\ln(2-2\cos x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

oraz

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Po uwzględnieniu tożsamości

$$1-\cos x=2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$$

otrzymujemy

$$(\diamondsuit)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\frac{1}{2}\cdot\ln(2-2\cos x)=-\frac{1}{2}\cdot\ln 4\sin^2\frac{x}{2}=-\ln\left|2\cdot\sin\frac{x}{2}\right|$$

oraz

$$(\clubsuit)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\operatorname{arctg}\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}=\operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) & \text{dla}\quad x\in(0,\pi)\\ \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) & \text{dla}\quad x\in(-\pi,0)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} & \text{dla}\quad x\in(0,\pi)\\ -\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} & \text{dla}\quad x\in(-\pi,0)\end{array}\right.$$

Zwróćmy uwagę, że szereg ($\diamondsuit$) jest rozbieżny dla $x=0$, gdyż wówczas otrzymujemy szereg harmoniczny. A jego suma jest funkcją nieograniczoną mającą osobliwość w zerze. Tym samym otrzymaliśmy przykład funkcji nieograniczonej, która jest sumą[408] swojego szeregu Fouriera. To pokazuje, że założenia, przy których funkcja jest sumą swojego

[407] I urody.

[408] Jeśli zignorujemy rozbieżność w punkcie 0, czyli, ze względu na okresowość, w punktach postaci $2k\pi$.

szeregu Fouriera, mogą być dość skromne, gdyż nieograniczoność funckcji jest czymś gorszym niż nieciągłość pzy zachowaniu ograniczoności. A wzory na współczynniki szeregu Fouriera prowadzą w tym wypadku do całek niewłaściwych.

Z kolei podaną wyżej sumę szeregu (♣) należy uzupełnić o uwagę, że jest ona równa zeru w punktach postaci $k\pi$. Przy tym suma ta jest funkcją ciągłą w punktach $(2k+1)\pi$ i nieciągłą w punktach $2k\pi$.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

A teraz nawiązanie do mojej wcześniejszej zapowiedzi:
Widać wyraźnie, że szeregi potęgowe i trygonometryczne mają zupełnie inne własności. Jednak wkrótce zobaczymy, że są one różnymi obliczami tego samego obiektu...

Przypomnę, że najważniejsze różnice[409] to:

• Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest przedziałem, obszar zbieżności szeregu trygonometrycznego może być sieczką.

• Suma szeregu potęgowego jest nieskończenie różniczkowalna, suma szeregu trygonometrycznego może być nawet nieciągła.

• Funkcja może nie być sumą swojego szeregu Taylora, natomiast przy minimalnych założeniach funkcja jest sumą swojego szeregu Fouriera.

Można więc przypuszczać, że szereg potęgowy[410]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

jest czymś z innego świata niż szereg trygonometryczny

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

Rzeczywisty szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

możemy odnaleźć jako ślad zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

na prostej rzeczywistej. To nie wydaje się być jakąś wielką niespodzianką. Natomiast mniej oczywiste jest, że szereg trygonometryczny możemy prawie znaleźć w zespolonym

[409] W tym miejscu własności szeregów odnotowuję hasłowo. Dla większej precyzji trzeba się cofnąć do odpowiedniego wykładu.

[410] Współczynniki oznaczam przez c_n, aby uniknąć konfliktu oznaczeń ze współczynnikami szeregu trygonometrycznego, który pojawi się za chwilę.

szeregu potęgowym jako nawinięty na okrąg jednostkowy !!! Wystarczy przypomnieć sobie, że dla[411]

$$z=e^{xi}=\cos x+i\cdot\sin x$$

mamy

$$z^n=\cos nx+i\cdot\sin nx\,.$$

Wtedy na okręgu jednostkowym sparametryzowanym argumentem, zespolony szereg potęgowy przyjmuje postać:

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(\cos x+i\cdot\sin x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(\cos nx+i\cdot\sin nx)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\cos nx+i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}d_n\sin nx\,,$$

co już zaczyna pachnieć szeregiem trygonometrycznym.

Skoro wyszliśmy od zespolonego szeregu potęgowego, to jego współczynniki d_n nie muszą być rzeczywiste. Jeśli przyjmiemy na przykład

$$d_n=a_n-b_n\cdot i\,,$$

to otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\cos nx+i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}d_n\sin nx=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n\cdot i)\cos nx+i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n\cdot i)\sin nx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx)+i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cdot\sin nx-b_n\cdot\cos nx)\;.$$

Widzimy więc, że szereg trygonometryczny jest częścią rzeczywistą odpowiednio dobranego zespolonego szeregu potęgowego na okręgu jednostkowym.

Namiatki tego zjawiska już mieliśmy okazję doświadczyć, kiedy najpierw poznaliśmy przykład szeregu trygonometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n\cdot 3^n\cdot x\right)}{n}\,,\tag{$\spadesuit$}$$

którego obszar zbieżności jest gęstą sieczką, a jakiś czas później poznaliśmy zespolony szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n3^n}}{n}\,,\tag{$\heartsuit$}$$

który jest zbieżny w kole o promieniu 1, ale na okręgu jednostkowym jest zbieżny na gęstym zbiorze i rozbieżny na gęstym zbiorze.

Niby dwa przykłady, a tak naprawdę jeden, bo szereg trygonometryczny ($\spadesuit$) jest częścią rzeczywistą zespolonego szeregu potęgowego ($\heartsuit$) na okręgu jednostkowym, na który nawinięta[412] została prosta rzeczywista.

[411] Czyli dla z-tów z okręgu jednostkowego sparametryzowanych x-em.

[412] Przez parametryzację $z=e^{xi}=\cos x+i\cdot\sin x$.