Szeregi trygonometryczne.

Wielomian to funkcja określona wzorem postaci

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \,.$$

Liczba N jest stopniem[311] wielomianu. O szeregu potęgowym można myśleć jak o takim wielomianie nieskończonego[312] stopnia, gdzie zamiast skończonej sumy jednomianów mamy szereg funkcyjny:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

Na hasło wielomian trygonometryczny, nie znając obowiązującej definicji, można byłoby zareagować przypuszczeniem, że jest to wielomian dwóch zmiennych od $\sin x$ i $\cos x$, czyli jakiekolwiek wyrażenie, które można uzyskać z $\sin x$, $\cos x$ i liczb rzeczywistych przy użyciu trzech działań (dodawania, odejmowania i mnożenia). Innymi słowy jest to skończona suma wyrażeń postaci $c\cdot\sin^j x\cdot\cos^k x$, gdzie c jest liczbą rzeczywistą, a j oraz k są liczbami całkowitymi nieujemnymi[313].

W przeciwieństwie do zwykłych wielomianów, tak rozumiane wielomiany trygonometryczne nie mają jednoznacznej[314] postaci, bo np. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. A jeszcze więcej niejednoznaczności się pojawi, kiedy dopuścimy wyrażenia $\sin nx$ oraz $\cos nx$, które jak wiemy[315] wyrażają się przez $\sin x$ i $\cos x$. Okazuje się jednak, że każdy wielomian trygonometryczny można zapisać w postaci kombinacji liniowej wyrażeń $\sin nx$ oraz $\cos nx$, czyli jako[316]

$$a_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \,.$$

Co więcej, takie przedstawienie okazuje się być jednoznaczne[317].

[311] O ile $a_N \neq 0$.

[312] Potencjalnie nieskończonego, bo szereg potęgowy może mieć prawie wszystkie wyrazy zerowe i wówczas jego suma jest prawdziwym wielomianem skończonego stopnia.

[313] Przy konwencji, że $\sin^0 x=\cos^0 x=1$, bez rozczulania się nad tym, że $\sin x$ i $\cos x$ mogą być równe 0. Podobnie zresztą traktowaliśmy x^0 przy wielomianach przyjmując $x^0=1$.

[314] Jednoznaczność postaci można byłoby wymusić ustalając np., że $\sin x$ nie będzie występować w potędze większej niż pierwsza, ale to tylko taka uwaga na marginesie, bo nie jest to w centrum naszego zainteresowania w tym momencie.

[315] Pamiętacie? **Władca Sinusów.**

[316] Dla $n=0$ otrzymujemy $\cos 0x=1$, co ma odzwierciedlenie w składniku a_0 przed sumą. Natomiast $\sin 0x=0$ i nie ma sensu w żaden sposób tego uwzględniać w ogólnej postaci wielomianu trygonometrycznego.

[317] Nie oczekuję, że ktokolwiek będzie widział w tym momencie, że takie przedstawienie jest jednoznaczne. Celem tej części wykładu nie jest jednak systematyczne wyłożenie teorii, ale naszkicowanie zagadnień, które wykraczają poza główny nurt podstawowych wykładów z rachunku różniczkowego i całkowego, ale powinny zostać wspomniane w uniwersyteckim wykładzie z analizy.

Jeśli teraz napiszemy taki wielomian trygonometryczny o nieskończenie wielu składnikach:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ , \tag{$\spadesuit$}$$

to otrzymamy pewien szereg funkcyjny, zwany **szeregiem trygonometrycznym.** Szereg taki możemy sobie napisać dla dowolnych współczynników rzeczywistych a_n, b_n, tylko musimy się liczyć z tym, że w wielu przypadkach dostaniemy szereg funkcyjny albo wszędzie rozbieżny, albo zbieżny na tak małym zbiorze, że niewiele ciekawego da się z jego sumą zrobić[318].

Niektóre zadania z listy nr 13 dają nam jednak pozytywne przykłady w tym zakresie. Występują tam szeregi trygonometryczne[319], które są zbieżne na całej prostej, a ich sumy wykazują różnego rodzaju regularność: od ciągłości do wielokrotnej różniczkowalności.

Wyobraźmy sobie teraz, że mamy dany szereg trygonometryczny zbieżny[320] na całej prostej i niech f będzie jego sumą. Oczywiście f jest funkcją okresową o okresie 2π, bo taki okres mają wszystkie wyrazy szeregu trygonometrycznego.

Mamy więc

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ .$$

I zadajmy analogiczne pytanie jak w przypadku szeregów potęgowych: Czy[321] znając funkcję f, o której wiemy, że jest sumą szeregu trygonometrycznego, można odtworzyć współczynniki tego szeregu?

Przyjmijmy, że możemy beztrosko[322] wykonywać różne operacje, które zaraz się pojawią. Ale zanim do tych beztroskich operacji dojdziemy, zbierzmy sobie trochę wartości pewnych całek oznaczonych.

---

[318] Takim szeregiem jest np. szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\cdot 3^n\cdot x)}{n}$$

rozważany w przykładzie **93** (wykład 16, str. 164), który to szereg jest rozbieżny na gęstym zbiorze. Jednak to nie jest jeszcze najgorzej, bo ten szereg w wielu punktach jest zbieżny. Ale jakbyśmy napisali do wiwatu szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{n^{n^n}}\cdot\cos nx\,,$$

to byłoby trudno wskazać jakikolwiek punkt, w którym jest on zbieżny. A faktycznie jest on wszędzie rozbieżny, czego udowodnienie wymaga trochę więcej wiedzy lub pokombinowania.

[319] Chociaż zapisane w nieco innej postaci niż ($\spadesuit$) ze względu na to, że pominięte są wyrazy zerowe, a numeracja wyrazów szeregu nie zawsze odpowiada numeracji ze wzoru ($\spadesuit$).

[320] Jakoś tam zbieżny, nie precyzuję dokładnie. Z jednej strony zadowala mnie zbieżność punktowa, ale w razie potrzeby mogę założyć zbieżność jednostajną — przy takim założeniu otrzymam ciągłość funkcji będącej sumą tego szeregu.

[321] I ewentualnie: jak?

[322] To można byłoby poprzeć odpowiednimi twierdzeniami wykraczającymi poza zakres wykładu.

Rozważane całki będą miały przedział całkowania długości[323] 2π, a funkcja podcałkowa będzie iloczynem dwóch spośród funkcji występujących w szeregu trygonometrycznym, czyli określonych wzorami: 1 (stała), $\sin nx$, $\cos nx$. Obliczenie wartości tych całek nie powinno nastręczać trudności[324], ograniczę się więc do zebrania wyników:

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot 1\,dx = 2\pi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\cdot \cos nx\,dx = \pi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\cdot \cos mx\,dx = 0\,, \qquad (m\neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\cdot \sin nx\,dx = \pi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\cdot \sin mx\,dx = 0\,, \qquad (m\neq n)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\cdot \sin mx\,dx = 0\,.$$

Najważniejsze spostrzeżenie dotyczące powyższych wyników jest następujące:

Całka z iloczynu dwóch różnych spośród funkcji:

1 (stała), $\sin nx$, $\cos nx$ jest zerem.

Jeśli teraz

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

[323]Wszystko jedno, jaki przedział długości 2π, gdyż funkcje podcałkowe mają okres 2π.

[324]A poza tym nie jest w tej chwili najważniejsze, abyśmy te całki szczegółowo wyliczali. Upewnij się jednak, że w razie potrzeby umiesz je wyliczyć.

i jeśli założymy pełną beztroskę[325] w wykonywanych rachunkach, to otrzymamy:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ dx =$$

$$= a_0 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} dx}_{=2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx}_{=0} + b_n \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx}_{=0} \right) = 2\pi a_0\,,$$

skąd

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,.$$

Podobnie[326]

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cdot \cos nx\,dx =$$

$$= a_0 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos nx\,dx}_{\substack{=0 \text{ dla } k\neq n \\ =\pi \text{ dla } k=n}} + b_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos nx\,dx}_{=0} \right) = \pi a_n\,,$$

skąd

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cdot \cos nx\,dx\,.$$

Analogicznie

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin nx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cdot \sin nx\,dx =$$

$$= a_0 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \sin nx\,dx}_{=0} + b_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \sin nx\,dx}_{\substack{=0 \text{ dla } k\neq n \\ =\pi \text{ dla } k=n}} \right) = \pi b_n\,,$$

skąd

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin nx\,dx\,.$$

[325] A dokładniej: założymy, że w tym wypadku całka sumy jest sumą całek, tyle że w grę wchodzą sumy nieskończone — szereg funkcyjny pod całką i szereg liczbowy całek oznaczonych.

[326] Po zmianie zmiennej sumowania z zajętej w tym momencie literki n na literkę k.

Wniosek: Jeżeli

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\ ,$$

to

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\,dx\,, \tag{$F0$}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx \tag{FA}$$

oraz

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx\,. \tag{FB}$$

Powyższe wzory pozwalają[327] więc odtworzyć współczynniki zbieżnego szeregu trygonometrycznego na podstawie znajomości funkcji będącej jego sumą.

Zwróćmy jednak uwagę, że wzory $(F0)$, (FA) i (FB) możemy zastosować do funkcji f nie wiedząc, czy jest ona sumą szeregu trygonometrycznego. Wystarczy, aby funkcja f była funkcją okresową[328] o okresie 2π i na tyle regularną[329], aby występujące w tych wzorach całki miały sens.

Zatem z odpowiednią[330] funkcją f możemy związać szereg trygonometryczny

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\ , \tag{$\spadesuit$}$$

gdzie współczynniki a_0, a_n i b_n dane są wzorami $(F0)$, (FA) i (FB).

Taki szereg nazywamy[331] **szeregiem Fouriera funkcji f**.

---

[327]Jeszcze raz do znudzenia powtórzę: wszystko przy założeniu, że nasze beztroskie rozbijanie całki na nieskończoną sumę całek jest poprawne. Jest poprawne, ale nie będziemy tego dowodzić.

[328]Formalnie, to wzory $(F0)$, (FA) i (FB) tak jak stoją możemy stosować bez założenia okresowości funkcji f, ale mówiliśmy wcześniej, że całki są po jakimkolwiek przedziale długości 2π, którego wybór nie ma znaczenia w przypadku funkcji okresowej. Tak więc bez założenia okresowości funkcji f cała zabawa byłaby mało sensowna.

[329]Ciągłość w zupełności wystarczy. Ale niezbyt dużo punktów nieciągłości też mamy szansę przeżyć. A przy dobrych układach, to f może mieć nawet osobliwość, o ile prowadzi ona do zbieżnych całek niewłaściwych.

[330]Okresową i regularną (czyli całkowalną).

[331]W literaturze często spotyka się szereg Fouriera zapisany w postaci

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\ ,$$

gdzie

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\,dx\,.$$

To tylko kwestia gustu, co bardziej nas drażni: sztuczne $\frac{a_0}{2}$ w powyższym wzorze, czy inny współczynnik przed całką we wzorze $(F0)$ niż we wzorach (FA) i (FB).

Przypomnijmy: W przypadku szeregów potęgowych też mieliśmy procedurę odzyskania współczynników na podstawie funkcji będącej sumą szeregu. Ta procedura pozwalała związać z nieskończenie różniczkowalną funkcją szereg potęgowy — szereg Taylora, który był jedynym kandydatem na rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy. Niestety, przykłady pokazywały, że szereg Taylora może być rozbieżny wszędzie poza zerem, a nawet jak jest zbieżny, to jego suma nie musi być wyjściową funkcją.

Czy w przypadku szeregu Fouriera też czekają nas takie przykre niespodzianki? Okazuje się, że tu jest o wiele lepiej. Przy minimalnych założeniach o funkcji, jest ona sumą swojego szeregu Fouriera.

Byłoby miło, gdyby szereg Fouriera funkcji był zbieżny, a jego sumą była funkcja f. Okazuje się, że stosunkowo niewiele trzeba zakładać o funkcji f, aby tak było.

Wprawdzie znane są przykłady funkcji[332] ciągłych, których szereg Fouriera jest rozbieżny w wielu[333] punktach, ale z naszego[334] punktu widzenia są to przykłady nietypowe.

Kluczowe jest to, aby funkcja nie była za bardzo pofałdowana. Są różne sformułowania warunku wymuszającego taki brak pofałdowania, ale wydaje się że dla naszych zastosowań najprostsze i najodpowiedniejsze będzie następujące twierdzenie:

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π, która:
- w pojedynczym okresie ma skończenie wiele punktów nieciągłości,
- w każdym punkcie nieciągłości ma granice jednostronne,
- w każdym punkcie[335] ma wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych,
- jest przedziałami monotoniczna, to znaczy, że pojedynczy okres można tak podzielić na skończenie wiele przedziałów, że w każdym z nich funkcja jest monotoniczna.

Wówczas szereg Fouriera funkcji f jest punktowo zbieżny, a f jest jego sumą.

Innymi słowy, funkcję spełniającą powyższe warunki możemy zapisać w postaci sumy szeregu[336] trygonometrycznego.

---

[332] Oczywiście okresowych o okresie 2π, innych w tym momencie nie rozważamy.

[333] Rozbieżny na gęstym zbiorze punktów.

[334] Z naszego, to znaczy przyzwyczajonych do podawania funkcji w miarę ładnymi wzorkami. Z punktu widzenia bardziej zaawansowanej matematyki są to jednak przykłady typowe w tym sensie, że większość (cokolwiek to znaczy) funkcji ciągłych ma szereg Fouriera rozbieżny na zbiorze gęstym.

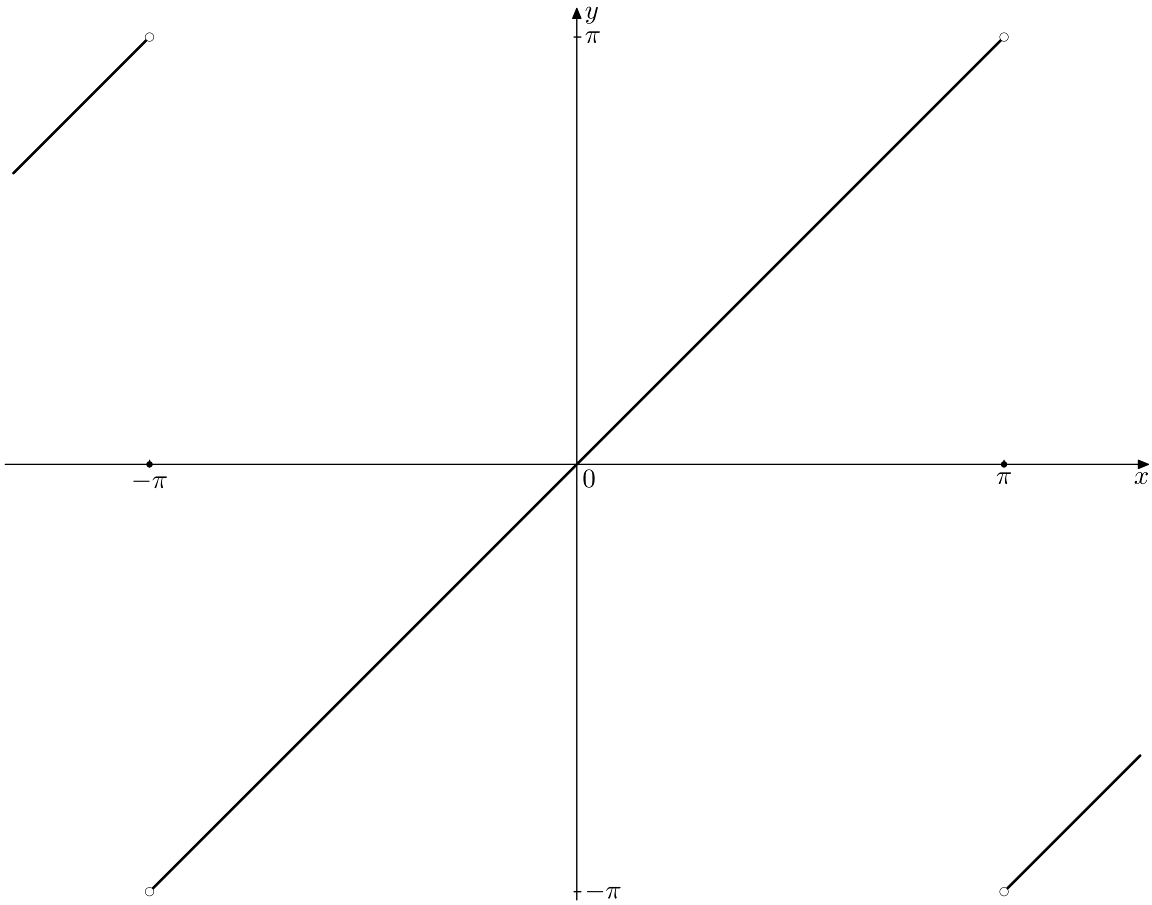
[335] W punktach ciągłości to niczego nie wnosi. Chodzi o to, że w każdym punkcie nieciągłości x_0 mamy

$$f(x_0)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}\,.$$

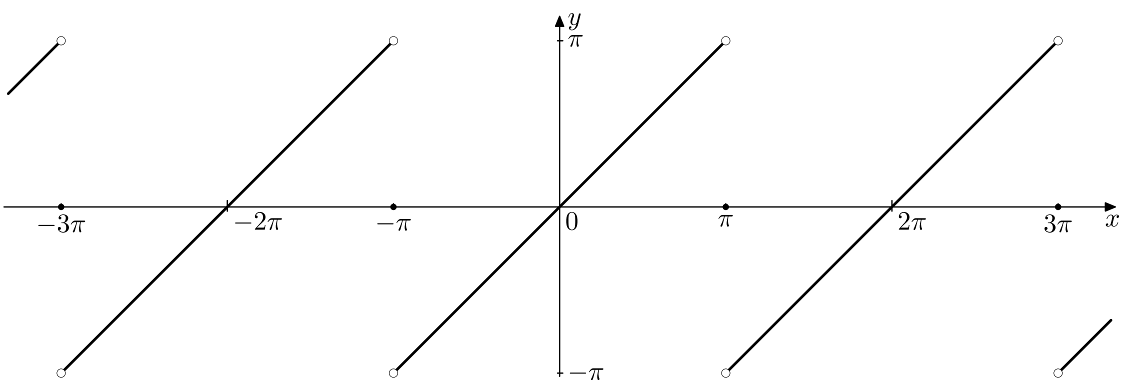
[336] Zbieżnego punktowo.

Przyjrzyjmy się konkretnym przykładom oraz wnioskom, jakie można przy pomocy tych przykładów wyciągnąć. Zwracam uwagę, że definiując funkcję okresową wystarczy podać jej wzór na jakimkolwiek przedziale długości 2π.

Przykład 96:
Niech f będzie zdefiniowana wzorem $f(x)=x$ dla $x\in(-\pi,\pi)$.



rys. 64



rys. 65

Ponieważ f jest okresowa o okresie 2π, jej wykres wygląda jak na rysunkach 64 i 65. Widzimy, że w nieparzystych wieloktrotnościach liczby π funkcja f jest nieciągła. Jeśli jednak chcemy, aby była ona sumą swojego szeregu Fouriera, powinniśmy w tych punktach przyjąć[337] wartość funkcji równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych, czyli w tym wypadku[338] 0.

Do obliczenia współczynników szeregu Fouriera funkcji f użyjemy wzorów $(F0)$, (FA) i (FB) pamiętając, że występujące w nich całki oznaczone mają być liczone po przedziale długości[339] 2π, ale przedział ten można wybrać dowolnie. W tym wypadku wygodniej będzie całkować od $-\pi$ do π. Wobec tego[340]:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx=0\,, \qquad\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx=0$$

oraz[341]

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot x\cdot\frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{x=-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\frac{-\cos nx}{n}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot\frac{-\cos n\pi}{n}-\frac{1}{\pi}\cdot(-\pi)\cdot\frac{-\cos n(-\pi)}{n}-\underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\sin nx}{n^2}\Bigg|_{x=-\pi}^{\pi}\right)}_{=0}=-\frac{2\cos n\pi}{n}=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx}{n}=2\sin x-\sin 2x+\frac{2\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{2\sin 5x}{5}-\frac{\sin 6x}{3}+\ldots$$

Natomiast dla $x\in(-\pi,\,\pi)$ mamy

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx}{n}=2\sin x-\sin 2x+\frac{2\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{2\sin 5x}{5}-\frac{\sin 6x}{3}+\ldots$$

Podstawiając do powyższych wzorów takie wartości x, dla których jesteśmy w stanie kontrolować wartości sinusów występujące w szeregu, będziemy dostawać różne równości, czasami trywialne, czasami głębokie.

I tak dla $x=0$ otrzymujemy, że zero jest sumą szeregu zer. Mało podniecające. To samo będzie dla $x=\pi$.

Spróbujmy $x=\pi/2$. Pamiętając, że

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych}\\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$$

[337]Ponieważ zmiana funkcji podcałkowej w jednym punkcie nie wpływa na wartość całki oznaczonej, szereg Fouriera funkcji f nie zależy od tego jaką wartość przyjmniemy w punktach nieciągłości. Jednak szereg Fouriera w punktach nieciągłości jest zbieżny do średniej arytmetycznej granic jednostronnych funkcji, więc lepiej, żeby ta średnia była wartością funkcji.

[338]Bo granica lewostronna jest równa π, a prawostronna $-\pi$.

[339]Czyli po pełnym okresie funkcji f.

[340]Pamiętajmy, że całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera jest zerem.

[341]Całkując przez części.

otrzymujemy równość[342]

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{2\nmid n}\frac{2\cdot\overbrace{(-1)^{n+1}}^{=1}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^k}{2k+1}=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,,$$

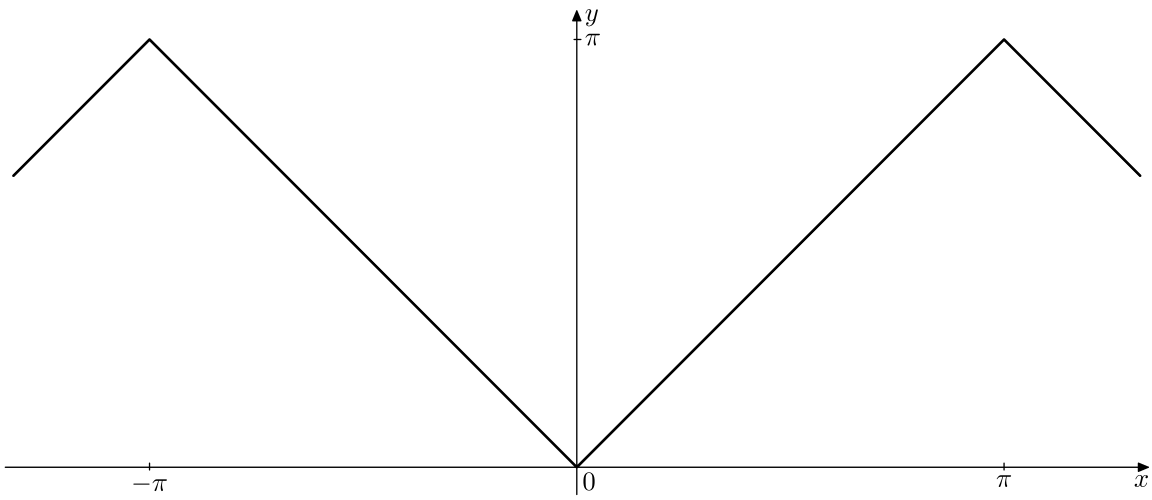
skąd

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

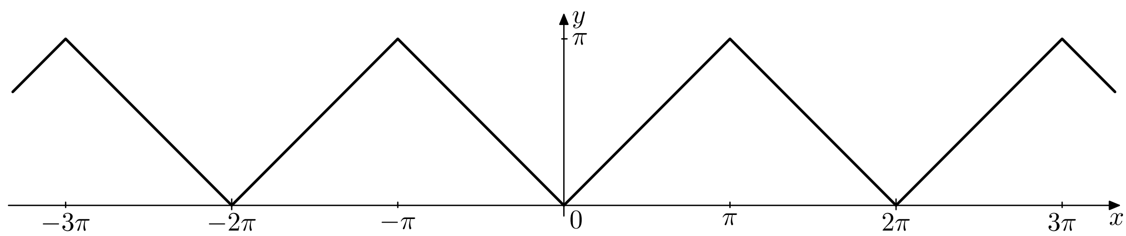
Ta równość jest dalece nietrywialna, chociaż jest nam już znana[343].

Przykład 97:

Niech f będzie zdefiniowana wzorem $f(x)=|x|$ dla $x\in[-\pi,\,\pi)$.



rys. 66



rys. 67

Ponieważ f jest okresowa o okresie 2π, jej wykres wygląda jak na rysunkach 66 i 67. Widzimy, że funkcja f jest ciągła.

[342] Pierwsze sumowanie odbywa się po n nieparzystych, a w drugim numerujemy liczby nieparzyste n przyjmując $n=2k+1$.

[343] Pamiętacie? Rozwinięcie arcusa tangensa w szereg potęgowy.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, do obliczenia współczynników szeregu Fouriera funkcji f użyjemy wzorów $(F0)$, (FA) i (FB) z granicami całkowania od $-\pi$ do π:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\pi/2\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_{0}^{\pi}|x|\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_{0}^{\pi}x\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos n\pi-1}{n^2}\,.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\cdot\sin nx\,dx=0\,.$$

Całkę we wzorze na a_0 obliczamy geometrycznie (patrząc na pole figury pod wykresem). Całkę we wzorze na a_n obliczamy przez części[344] (rachunki są standardowe, więc je pomijam).

Całka we wzorze na b_n jest zerem jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

Pewnego uproszczenia wymaga otrzymany wzór na a_n:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos n\pi-1}{n^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\begin{cases}0 & \text{dla } n \text{ parzystych}\\ -4/(\pi\cdot n^2) & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$$

W konsekwencji rozwinięcie funkcji f w szereg Fouriera jest następujące:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4\cos(2k+1)x}{\pi\cdot(2k+1)^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{4\cos x}{\pi}-\frac{4\cos 3x}{\pi\cdot 9}-\frac{4\cos 5x}{\pi\cdot 25}-\frac{4\cos 7x}{\pi\cdot 49}-\ldots$$

Dla $x=0$ otrzymujemy równość

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,,$$

skąd

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Z kropeczkami to wygląda tak:

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Słownie: Suma odwrotności kwadratów nieparzystych liczb naturalnych jest równa $\pi^2/8$.

Otrzymaliśmy więc kolejny bardzo nietrywialny wzór. Zapewne odczuwamy pewnien niedosyt, bo wolelibyśmy otrzymać wartość podobnej, ale chyba trochę bardziej estetycznej sumy, a mianowicie sumy odwrotności kwadratów wszystkich liczb całkowitych

[344] Stosując przedtem wzór

$$\int\limits_{-a}^{a}g(x)\,dx=2\cdot\int\limits_{0}^{a}g(x)\,dx$$

prawdziwy dla funkcji parzystej g.

dodatnich. Nic straconego, okazuje się bowiem, że jesteśmy o krok od uzyskania także wartości tej sumy. Jeśli bowiem oznaczymy

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots$$

oraz

$$T=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\ldots,$$

to[345]

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{2\nmid n}\frac{1}{n^2}+\sum_{2\mid n}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=T+\frac{1}{4}\cdot S,$$

skąd

$$S=\frac{4}{3}\cdot T.$$

W konsekwencji

$$S=\frac{4}{3}\cdot T=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Otrzymaliśmy więc wzór:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Widać w tych metodach ogromną siłę, gdyż byliśmy w stanie obliczyć sumy szeregów liczbowych w sytuacji, kiedy sama postać tych sum odbiera nadzieję na ich uzyskanie prostymi elementarnymi metodami.

[345] Jeśli się gubisz w tych sumach, rozpisz je sobie z kropeczkami.

Iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji.

Najpierw trzeba sobie wyjaśnić czym jest[346] iloczyn skalarny. Zapewne kojarzycie go z iloczynem skalarnym w przestrzeni[347] $\mathbb{R}^3$. Błogosławieństwem i przekleństwem tej przestrzeni jest naturalna, wynikająca z definicji struktura polegająca na tym, że każdy element tej przestrzeni ma w naturalny sposób przypisaną trójkę współrzędnych, powiedzmy[348] (x, y, z). W konsekwencji mamy jak na tacy podaną bazę $\mathbb{R}^3$ jako przestrzeni liniowej oraz iloczyn skalarny i elementy związanej z nim geometrii euklidesowej (długości wektorów i kąty między wektorami). Niestety, ceną za to jest utrudnione zrozumienie, że iloczyn skalarny mógłby wyglądać inaczej, i że mógłby prowadzić do innych geometrii.

Skoncentrujmy się na razie na płaszczyźnie — niektóre rzeczy będzie łatwiej sobie wyobrazić niż w przestrzeni. Płaszczyznę jako $\mathbb{R}^2$ możemy sobie wyobrazić jako nieskończoną kartkę papieru z narysowanymi i wyskalowanymi osiami. Na takiej płaszczyźnie każdy punkt ma w naturalny sposób przypisane współrzędne (x, y). Taka płaszczyzna ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej[349]. Ale ma też dodatkową strukturę wynikającą z naturalnego iloczynu skalarnego: długości wektorów i kąty między wektorami. I na dodatek ta przestrzeń liniowa ma naturalną bazę, na którą składają się wersory obu osi.

Pomyślmy teraz o nieskończonej sztywnej[350] kartce papieru, na której nie ma żadnych osi, a jedynie zaznaczony jest jeden punkt, w domyśle początek potencjalnego układu współrzędnych[351]. Na tej płaszczyźnie nie ma naturalnej bazy[352], za to jest struktura przestrzeni liniowej i jest naturalny iloczyn skalarny (bo są dobrze zdefiniowane odległości i kąty).

Wreszcie wyobraźmy sobie luźno utkaną tkaninę. Tkanina ta składa się z włókien, z których część biegnie w jednym kierunku, a część w drugim. Włókna są na tyle szorstkie, że nie ślizgają się jedne po drugich[353]. Jednak tkanina jest na tyle luźno utkana, że kąt pomiędzy włóknami obu kierunków może się zmieniać[354]. Na tej tkaninie zaznaczony jest punkt (czerwony na rys. 68 i 69). Jeżeli narysujemy dwa wektory zaczepione w tym

---

[346] Czym jest, czyli o co w nim naprawdę chodzi. Sucha formalna definicja sama w sobie niewiele wyjaśni.

[347] Lub na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

[348] Pozwolę sobie używać poziomej notacji współrzędnych wektora. Graficznie jest ona czytelniejsza, zwłaszcza gdy współrzędnych zrobi się bardzo dużo. Ale gdybyśmy chcieli odwoływać się do różnych niuansów algebry liniowej, to notacja pionowa byłaby w zasadzie koniecznością.

[349] Jeśli ktoś elementy przestrzeni liniowej nazywa wektorami, a wektory kojarzy ze strzałkami, to świetnie: każdy punkt można utożsamić z wektorem zaczepionym w początku układu współrzędnych, o końcu w danym punkcie.

[350] Sztywność między innymi oznacza, że ustalone są odległości między punktami tej kartki.

[351] W którym to punkcie ewentualnie będziemy zaczepiać wektory, jeśli chcemy punkty płaszczyzny utożsamić z wektorami-strzałkami.

[352] Oczywiście bazę można znaleźć, ale to wymaga dokonania jakiegoś wyboru.

[353] Czyli efekt jest taki jakby każde dwa włókna biegnące w różnych kierunkach były trwale złączone w ich punkcie przecięcia.

[354] Ale przyjmujemy, że przy deformacji tkaniny włókna pozostają prostoliniowe. Ponadto dla lepszego dostosowania tej sytuacji do naszej wyobraźni założymy, że włókna są nierozciągliwe.

punkcie oraz ich sumę, a następnie zaczniemy deformować tkaninę, to cały czas będzie na niej narysowana trójka wektorów, z których jeden jest sumą dwóch pozostałych. Można powiedzieć, że struktura przestrzeni liniowej jest niewrażliwa na deformację tkaniny. Jednak naturalnego iloczynu skalarnego na tej tkaninie już nie ma, bo nie ma ustalonych odległości między punktami oraz miar kątów — jedne i drugie zmieniają się w czasie deformacji.

Rozważmy teraz przestrzeń liniową, w której nie ma narzucającej się struktury prowadzącej do naturalnego zdefiniowania odległości, czy też iloczynu skalarnego. Niech V będzie przestrzenią liniową[355] wielomianów stopnia co najwyżej 2, przy czym myślmy o tych wielomianach bardziej jak o funkcjach niż o wzorach[356] które je definiują.

Formalną definicję ogólnego iloczynu skalarnego poznacie na algebrze liniowej. Ja chciałbym się tu skoncentrować na konstruowaniu różnych przykładów. Standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$, czy też w $\mathbb{R}^n$, jest sumą jakichś iloczynów[357]. W rozważanej przestrzeni liniowej V dobrze zdefiniowanym iloczynem skalarnym jest na przykład suma iloczynów wartości wielomianów w punktach 0, 1 i 2:

$$\langle P, Q\rangle = P(0)\cdot Q(0)+P(1)\cdot Q(1)+P(2)\cdot Q(2)\,.$$

A innym iloczynem skalarnym[358] jest suma iloczynów wartości wielomianów w punktach 2, 3, 5 i 7:

$$\langle P, Q\rangle = P(2)\cdot Q(2)+P(3)\cdot Q(3)+P(5)\cdot Q(5)+P(7)\cdot Q(7)\,.$$

Za iloczyn skalarny może być też przyjęta suma iloczynów wartości wielomianów w punktach od 0 do 1 co jedną tysięczną:

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{1000} P\left(\frac{k}{1000}\right)\cdot Q\left(\frac{k}{1000}\right)\,.$$

A skoro może być to suma iloczynów wartości wielomianów w bardzo wielu punktach, to łatwo sobie wyobrazić sytuację graniczną, gdzie zamiast sumy pojawia się całka, na przykład można przyjąć za iloczyn skalarny:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)\cdot Q(x)\, dx$$

albo jak ktoś ma fantazję i chce upamiętnić datę ostatniego kolokwium:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{1805}^{2021} P(x)\cdot Q(x)\, dx\,.$$

Mamy więc pięć iloczynów skalarnych w tej samej przestrzeni liniowej. Można oczywiście oceniać, że jedne są bardziej sztuczne od innych, ale o żadnym z nich nie można powiedzieć, że to jest ten najlepszy, najbardziej naturalny, najbardziej narzucający się.

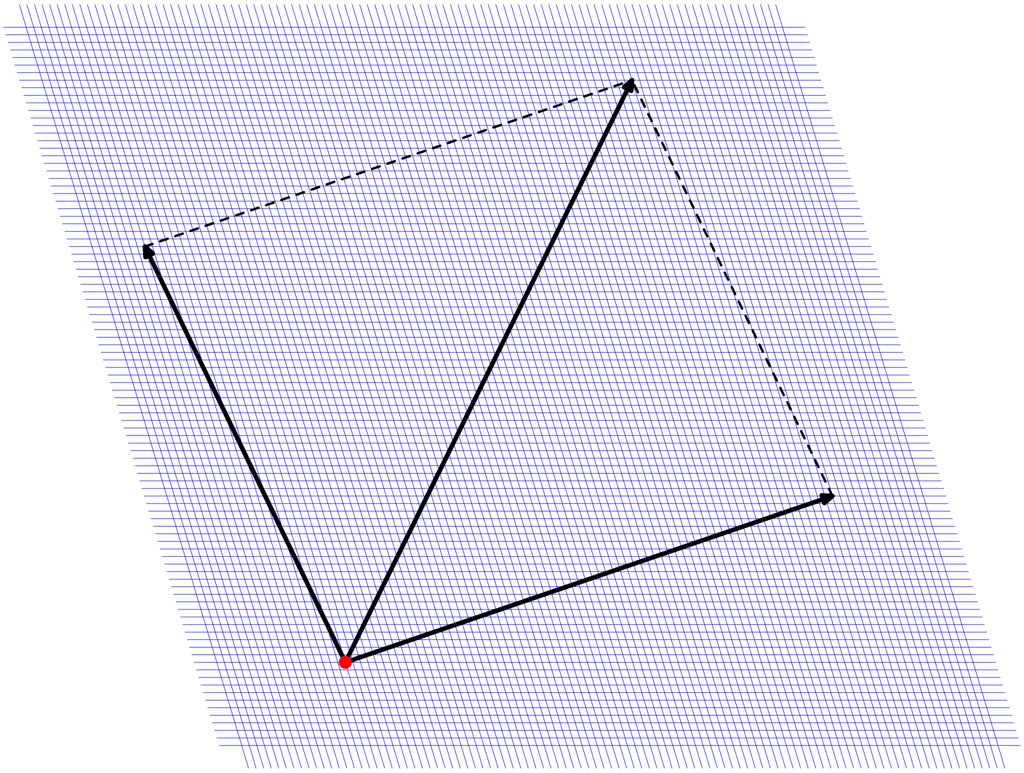
---

[355] Z naturalnymi działaniami.

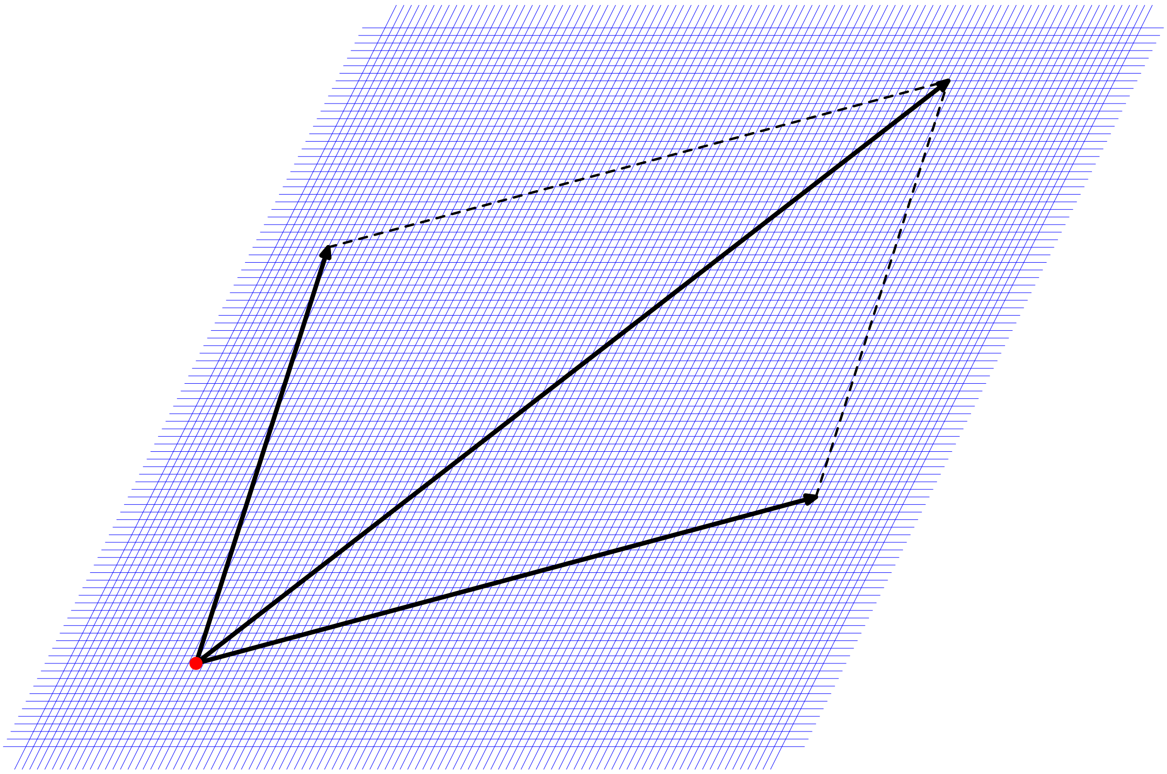
[356] Gdybyśmy kojarzyli te wielomiany z napisami ax^2+bx+c, to byłby tylko krok od utożsamienia takiego wielomianu z punktem (a,b,c) przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a tego nie chemy.

[357] Sumą iloczynów współrzędnych, ale to doprecyzowanie celowo przemilczę, bo chcę się oderwać od jakiegolwiek sugerowania współrzędnych.

[358] Uwielbianym przez miłośników liczb pierwszych.



rys. 68



rys. 69

Po tym wstępie dotyczącym iloczynu skalarnego wróćmy do funkcji okresowych o okresie 2π określonych na $\mathbb{R}$. Nie będę dokładnie precyzował, o jaki zbiór funkcji mi chodzi, bo w zależności od sytuacji chciałbym rozważać nieco inne zbiory. Ważne, aby zbiór ten wraz z naturalnymi działaniami tworzył przestrzeń liniową, co przy sensownie zdefiniowanych zbiorach funkcji sprowadza się do tego, aby zbiór był zamknięty na dodawanie funkcji. Może to być zbiór wszystkich funkcji ciągłych[359]. A możemy dopuszczać nieciągłości typu skoku, gdzie w punktach nieciągłości istnieją granice jednostronne, a wartość funkcji jest średnią arytmetyczną tych granic[360]. Ale też nie będziemy się bali dorzucić do zbioru funkcji nieograniczonej, jeśli będzie ona prowadziła do zbieżnych całek niewłaściwych. Z drugiej zaś strony w niektórych sytuacjach możemy chcieć do ciągłości dodać warunki prowadzące do zbieżnego szeregu Fouriera. Na myśl przychodzi założenie, że funkcja jest przedziałami monotoniczna, ale to zły pomysł, bo nie prowadzi do przestrzeni liniowej[361]. Można z tego wybrnąć warunkami typu wahania skończonego[362], ale nie będę wchodził w szczegóły. Dość, że rozważać będziemy jakąś przestrzeń liniową funkcji — można myśleć o funkcjach ciągłych i mieć z tyłu głowy ewentualne modyfikacje.

W duchu sumy iloczynu lub całki z iloczynu, dla funkcji okresowych dość naturalne wydaje się przyjęcie iloczynu skalarnego jako całki z iloczynu[363] po pełnym okresie[364]:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\, dx\,.$$

W języku tak zdefiniowanego iloczynu skalarnego możemy zapisać całki ze strony 181 jako[365]:

$$\langle 1, 1\rangle = 2\pi, \qquad \langle \cos nx, \cos nx\rangle = \pi, \qquad \langle \sin nx, \sin nx\rangle = \pi,$$

[359]Cały czas ograniczamy się do funkcji okresowych o okresie 2π określonych na $\mathbb{R}$.

[360]Ponieważ iloczyn skalarny będzie definiowany przy pomocy całki oznaczonej, a całka nie dostrzega zmiany wartości funkcji w pojedynczych punktach, musimy wykluczyć funkcje, które zerowałyby się poza skończenie wieloma punktami w każdym okresie. Iloczyn skalarny nie odróżniałby takich funkcji od funkcji zerowej. W konsekwencji jakkolwiek określimy zbiór rozważanych funkcji, nie możemy dopuszczać dowolnej zmiany wartości funkcji w pojedynczym punkcie. Warunek ze średnią granic jednostronnych wyklucza takie zmiany.

[361]Suma funkcji przedziałami monotonicznych może nie być przedziałami monotoniczna.

[362]Czasami można spotkać to pojęcie pod nazwą: wahanie ograniczone.

[363]Ewentualnie można tę całkę podzielić przez π przyjmując

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\, dx\,,$$

co w tym momencie może się wydawać nieco sztuczne, ale pozwala uniknąć czynnika π lub $\sqrt{\pi}$ w innym miejscu teorii.

[364]Oczywiście przedział całkowania może być dowolnym przedziałem długości 2π.

[365]Pewne wątpliwości może budzić zapis typu $\langle \sin 2x, \cos 3x\rangle$ czy $\langle 1, \sin 5x\rangle$, gdyż skalarnie mnożymy funkcje, a nie wartości funkcji w punkcie. To się jednak daje obronić traktując to jako skrócone formy w pełni sformalizowanych, ale niezbyt poręcznych zapisów

$$\langle (\sin 2x : x\in\mathbb{R}), (\cos 3x : x\in\mathbb{R})\rangle \qquad \text{oraz} \qquad \langle (1 : x\in\mathbb{R}), (\sin 5x : x\in\mathbb{R})\rangle\,.$$

Przypomnienie: $f = (f(x) : x\in D_f) = \{(x, f(x)) : x\in D_f\}$.

$$\langle 1, \cos nx\rangle = 0, \qquad \langle 1, \sin nx\rangle = 0, \qquad \langle \cos nx, \sin mx\rangle = 0,$$

$$\langle \cos nx, \cos mx\rangle = 0, \qquad \langle \sin nx, \sin mx\rangle = 0. \qquad \text{(oba wzory dla } m \neq n)$$

Możemy więc powiedzieć, że funkcje określone wzorami: 1 (stała), $\sin nx$, $\cos nx$ tworzą układ ortogonalny[366].

Natomiast funkcje określone wzorami:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \tag{$\diamondsuit$}$$

tworzą układ ortonormalny[367].

Powstaje naturalne pytanie: Czy ten układ funkcji jest czymś w rodzaju bazy, to znaczy, czy w jakiś sposób wyznacza przestrzeń liniową rozważanych funkcji? I tak i nie.

Odpowiedź "nie" to odpowiedź algebry liniowej, która w przestrzeni funkcji widzi przestrzeń liniową, a więc taką, gdzie możliwe jest tylko branie skończonych kombinacji liniowych wektorów. W konsekwencji podany wyżej układ funkcji generuje przestrzeń liniową wielomianów trygonometrycznych.

Odpowiedź "tak" to odpowiedź analizy, która dopuszcza przejścia graniczne, a więc także nieskończone sumy przyjmujące postać szeregów zbieżnych. Okazuje się, że podany wyżej układ funkcji jest zupełny, to znaczy, że jedyną funkcją ciągłą prostopadłą do wszystkich funkcji tego układu jest funkcja zerowa.

Jeżeli $e_1,\ldots,e_n$ jest bazą ortonormalną skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej, to możemy sobie wyobrazić $e_1,\ldots,e_n$ jako wersory[368] poszczególnych osi skierowanych we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Wówczas k-ta współrzędna wektora v jest dana wzorem $\langle v, e_k\rangle$ i w konsekwencji

$$v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle \cdot e_k\,.$$

Jeżeli teraz wyobrazimy sobie nieskończenie wymiarowy odpowiednik przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, to możemy sobie wyobrazić nieskończenie wiele wersorów $e_1, e_2, e_3, \ldots$ nieskończenie wielu osi skierowanych we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Wówczas k-ta współrzędna wektora v jest dana wzorem $\langle v, e_k\rangle$ i w konsekwencji należałoby oczekiwać, że

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle \cdot e_k\,.$$

Jeśli w przestrzeni funkcji na poszczególnych osiach położymy funkcje ($\diamondsuit$), to powinniśmy oczekiwać dla okresowej funkcji ciągłej f wzoru

$$f(x) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, f\right\rangle \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, f\right\rangle \cdot \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right),$$

[366] Czyli taki układ wektorów przestrzeni liniowej z iloczynem skalarnym, że wektory tego układu są wzajemnie prostopadłe.

[367] Czyli taki układ wektorów przestrzeni liniowej z iloczynem skalarnym, że wektory tego układu są wzajemnie prostopadłe, a ponadto każdy wektor ma długość 1.

[368] Czyli wektory jednostkowej długości.

co z dokładnością do drobnego przeorganizowania współczynników jest stwierdzeniem, że funkcja jest sumą swojego szeregu Fouriera.

Gdybyśmy uparcie trzymali się zdefiniowanej wcześniej normy supremum i oczekiwali zbieżności jednostajnej, czy choćby punktowej, to niestety dla pewnych funkcji ciągłych byłyby problemy[369]. Norma supremum i zbieżność jednostajna świetnie pasują do funkcji ciągłych, gdy kluczowe jest zachowanie ciągłości przy przejściu granicznym, ale w przypadku szeregów Fouriera lepiej sprawdza się zbieżność oparta na normie związanej z iloczynem skalarnym:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx}\,.$$

Jednak wchodzenie w dalsze detale wykracza poza zakres tego wykładu.

Jeżeli w skończenie wymiarowej przestrzeni wprowadzimy bazę ortonormalną[370] i związane z nią współrzędne, to iloczyn skalarny okazuje się być po prostu sumą iloczynów współrzędnych:

$$\langle v\,, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v,\, e_k\rangle \cdot \langle w,\, e_k\rangle\,.$$

W szczególności

$$\langle v\,, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v,\, e_k\rangle^2.$$

Jeżeli przyjmiemy, że przestrzeń ma nieskończenie wiele prostopadłych wymiarów i zignorujemy trudności techniczne związane z przejściem granicznym, to możemy oczekiwać, że

$$\langle v\,, w\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v,\, e_k\rangle \cdot \langle w,\, e_k\rangle$$

oraz

$$\langle v\,, v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v,\, e_k\rangle^2.$$

Dla funkcji i związanych z nimi szeregów Fouriera, przy założeniu

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

otrzymujemy[371]:

$$\langle f,\, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\; dx = 2\pi \cdot a_0 \cdot c_0 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n + b_n \cdot d_n)\,.$$

[369]Jak już wcześniej wspomniałem, szereg Fouriera funkcji ciągłej może być rozbieżny na gęstym zbiorze.

[370]Może być też baza ortogonalna, tylko wtedy trzeba uwzględnić we wzorze długości wektorów bazowych.

[371]Ignorując teorię, która uzasadnia przejścia graniczne.

W szczególności otrzymujemy **równość Parsevala:**

$$\langle f,\, f\rangle = \int\limits_0^{2\pi} f^2(x)\; dx = 2\pi\cdot a_0^2 + \pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\,.$$

Na zakończenie zastosujmy równość Parsevala do wcześniej otrzymanych szeregów.

Przykład 98:

Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x)=x$ dla $x\in(-\pi,\,\pi)$ oraz $f(\pi)=0$.

$$a_0 = a_n = 0, \qquad\qquad b_n = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Ponieważ

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = 2\cdot\int\limits_0^{\pi} x^2\,dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_{x=0}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}\,,$$

równość Parsevala przyjmuje postać

$$\frac{2\pi^3}{3} = \pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 4\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,,$$

skąd otrzymujemy znaną nam równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Przykład 99:

Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x)=|x|$ dla $x\in[-\pi,\,\pi)$.

$$b_n = 0, \qquad\qquad a_0 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad\qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -4/(\pi\cdot n^2) & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$$

Ponieważ podobnie jak w poprzednim przykładzie

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^3}{3}\,,$$

równość Parsevala przyjmuje postać

$$\frac{2\pi^3}{3} = 2\pi\cdot a_0^2 + \pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{\pi^3}{2} + \pi\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2\cdot(2k+1)^4} = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\,,$$

skąd otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Postępując podobnie jak w przykładzie 97 (strona 187), można udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\,,$$

co prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Podsumowanie podstawowych faktów dotyczących szeregów potęgowych i trygonometrycznych.

Szereg potęgowy	**Własność**	**Szereg trygonometryczny**
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$	Wzór	$a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$
Wielomianem	Czym jest suma częściowa?	Wielomianem trygonometrycznym
Przedział	Obszar zbieżności	Może być sieczka
C^∞	Regularność sumy szeregu	Może być nieciągła
$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$	Odzyskiwanie współczynników na podstawie funkcji f będącej sumą szeregu	$a_0=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}f(x)\,dx$ $a_n=\dfrac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx$ $b_n=\dfrac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx$
Taylora	Nazwa odzyskanego szeregu	Fouriera
Nawet dla $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ może być rozbieżny	Przy jakich warunkach na f powyższy szereg jest zbieżny?	Przy $f\in C^1(\mathbb{R})$ zbieżny, a także przy niektórych słabszych warunkach (nawet bez ciągłości f)
Niekoniecznie	Jeśli zbieżny jednostajnie, a f jest ciągła, to czy jest zbieżny do f?	Tak
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$	Funkcja parzysta	$a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$	Funkcja nieparzysta	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$	Warianty definicji	$a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx+\varphi_n)$

Widać wyraźnie, że szeregi potęgowe i trygonometryczne mają zupełnie inne własności. Jednak wkrótce zobaczymy, że są one różnymi obliczami tego samego obiektu...