Władca Sinusów
The Lord of the Sines

Jak to rozwiązać ???

Obliczyć wartość takiej sumy:

$$\sin 37^\circ + \sin 157^\circ + \sin 277^\circ \,.$$

I takiej:

$$\sin 37^\circ + \sin 109^\circ + \sin 181^\circ + \sin 253^\circ + \sin 325^\circ \,.$$

I może jeszcze pochodną rzędu 2020 funkcji[227] $\sin^3$.

I przy okazji podać wzór na funkcję, której 2020-tą pochodną jest wyżej wspomniana funkcja $\sin^3$.

A jeśli znamy $\sin x$, to ile jest równe $\sin 7x$?

A ile to jest $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$?

Nie musisz umieć rozwiązać żadnego z tych zadań[228]. Ale chyba zdajesz sobie sprawę, że kluczem do ich rozwiązania jest mistrzowskie opanowanie wszelakich tożsamości trygonometrycznych.

Nauczymy się teraz cudownej, wprost niewiarygodnej umiejętności tworzenia na zawołanie potrzebnych tożsamości trygonometrycznych. Ale najpierw musisz sobie przypomnieć, co wiesz o liczbach zespolonych. Pomocne będzie odświeżenie wiadomości na ten temat poprzez zerknięcie do rozdziału 4.1 (Działania na liczbach zespolonych) skryptu dr.[229] Tomasza Elsnera z Algebry Liniowej 1.

Na początek dla treningu rozwiążemy następujące dwa zadania.

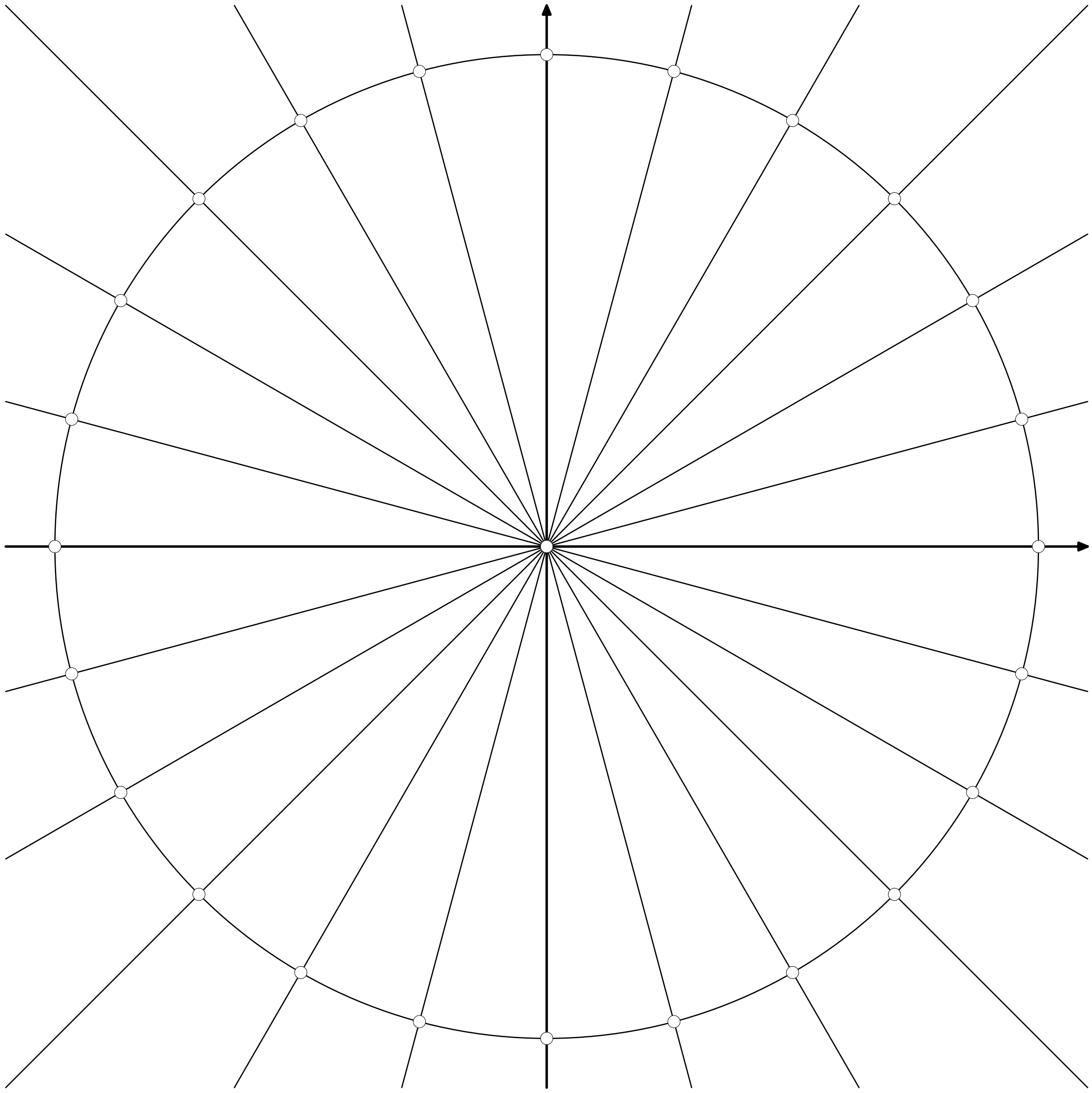
[227] Czyli funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sin^3 x$.

[228] Rozwiązania oparte o żmudne rachunki lub polegające na wygrzebaniu z tablic lub internetu gotowych wzorków niepecjalnie nas interesują.

[229] Czy po "dr" stawiamy kropkę?

Przykład 84:

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^3=i$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.

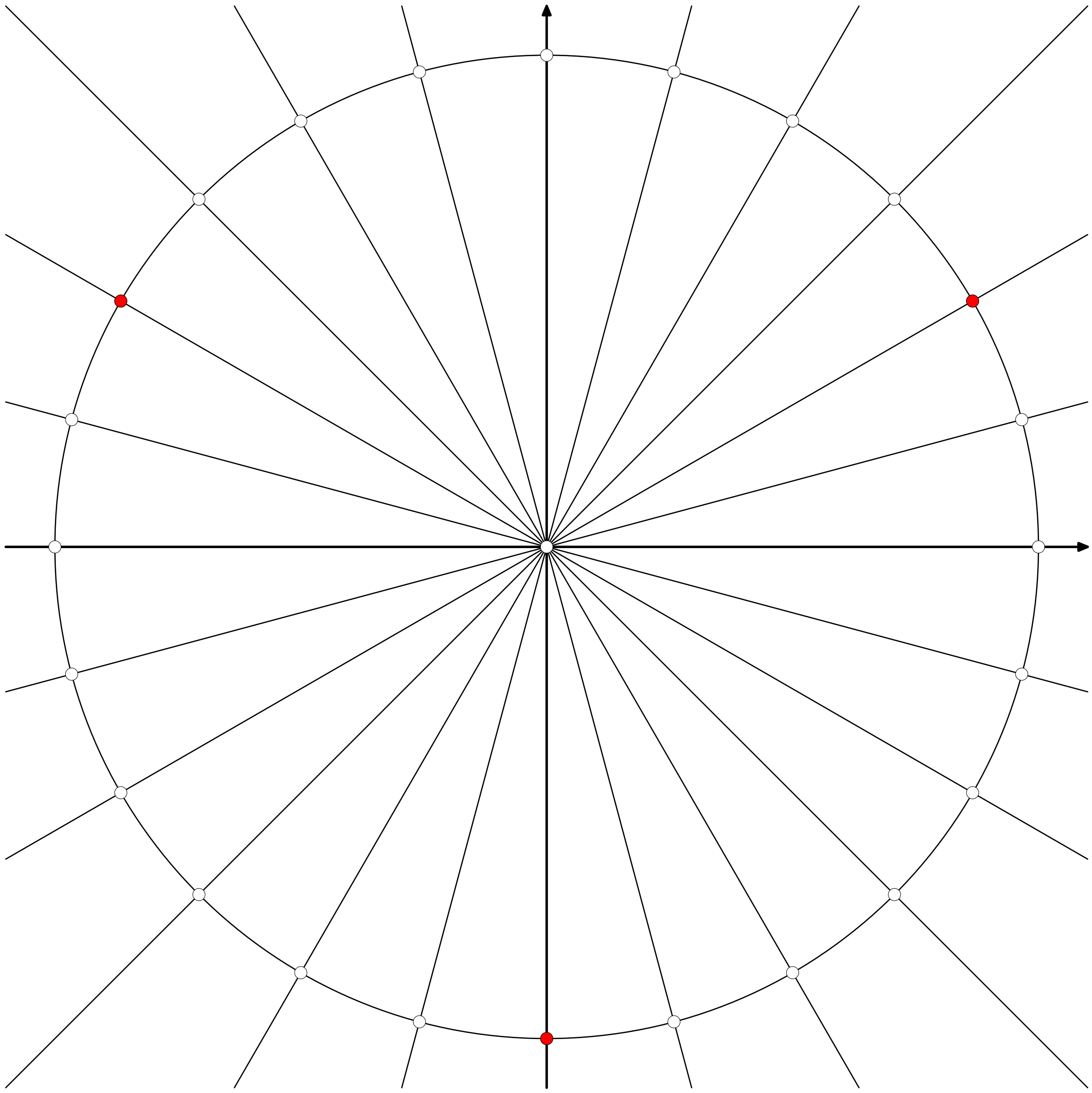


Rozwiązanie:

Dane w zadaniu równanie jest spełnione przez liczbę $z=-i$, a pozostałe dwa rozwiązania tego równania leża na okręgu jednostkowym co $120°$.

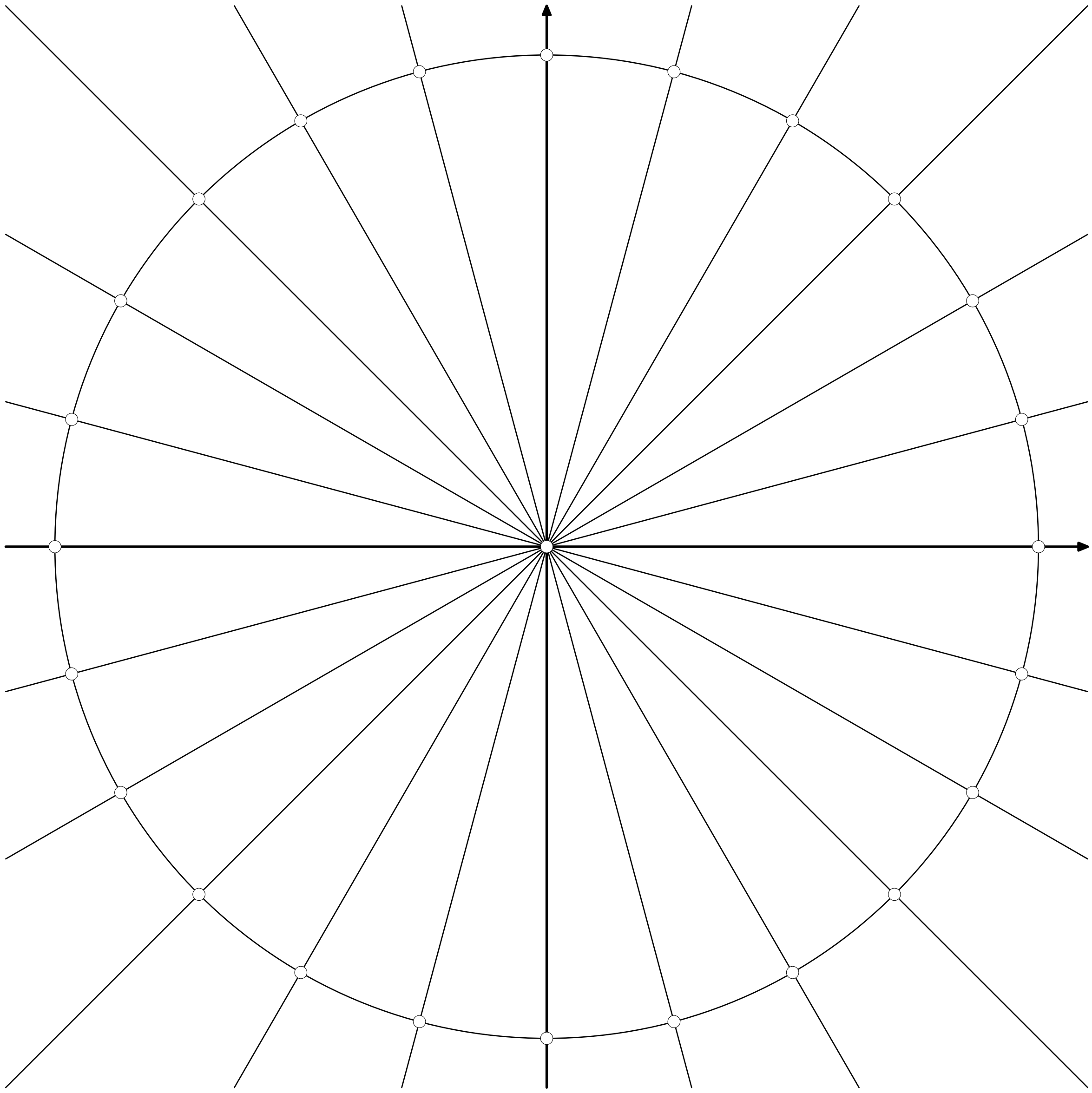
Inaczej: liczba i ma moduł 1 i argument $\pi/2$, a zatem jej pierwiastki sześcienne mają moduł 1 i argumenty $\pi/6+2k\pi/3$ dla $k=0,1,2$, czyli odpowiednio $\pi/6$, $5\pi/6$, $3\pi/2$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 3 rozwiązania: $-i$ oraz $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.



Przykład 85:

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^{27}+z^{16}=z^{24}+z^{19}$ w liczbach zespolonych. Podać liczbę rozwiązań, zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (można używać znaków "$\pm$" i "$\pm_2$" dla zapisania kilku rozwiązań jednym wzorem) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



Rozwiązanie:

Przekształcając dane równanie otrzymujemy kolejno:

$$z^{27}-z^{24}-z^{19}+z^{16}=0\,,$$

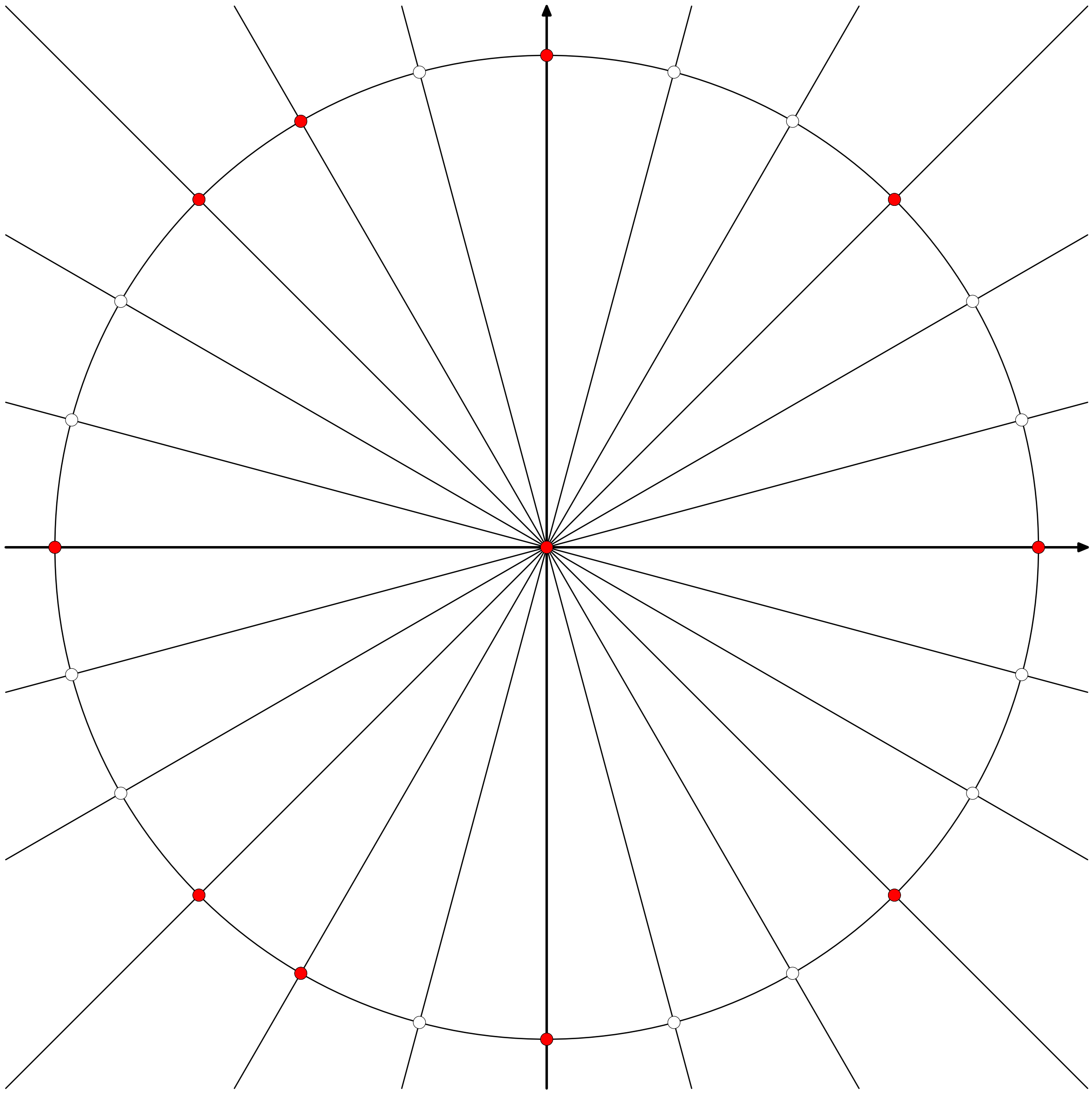
$$\left(z^3-1\right)\cdot z^{24}-\left(z^3-1\right)\cdot z^{16}=0\,,$$

$$\left(z^3-1\right)\cdot\left(z^{24}-z^{16}\right)=0\,,$$

$$\left(z^3-1\right)\cdot\left(z^{8}-1\right)\cdot z^{16}=0\,,$$

$$z^3=1 \quad \vee \quad z^8=1 \quad \vee \quad z=0\,.$$

Zatem dane równanie ma 11 rozwiązań i są to: liczba 0, osiem pierwiastków ósmego stopnia z jedności (w tym liczba 1) oraz dwa pierwiastki trzeciego stopnia z jedności (bez liczby 1, którą już uwzględniliśmy).



Odpowiedź:
Dane równanie ma 11 rozwiązań: 0, ± 1, $\pm i$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm_2\frac{\sqrt{2}}{2}i$ oraz $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Zgodnie z wcześniejszą obietnicą posiądziemy teraz cudowną umiejętność tworzenia na zawołanie potrzebnych tożsamości trygonometrycznych.

W skrypcie dr. Elsnera na dole strony 148 znajduje się **Fakt 4.9**, z którego jako wniosek wyciągnę następujące wzorki pozwalające zapanować nad dużą częścią świata tożsamości trygonometrycznych:

Dla danej liczby rzeczywistej x przyjmijmy[230]

$$z=\cos x+i\sin x\,.$$

Wówczas

$$z^{-1}=\cos x-i\sin x\,,$$

a ponadto dla każdej liczby naturalnej[231] n mają miejsce następujące równości[232]:

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx\,,$$

$$\cos nx=\mathrm{Re} z^n=\frac{z^n+z^{-n}}{2}, \qquad \sin nx=\mathrm{Im} z^n=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}\,.$$

Jak wielka moc tkwi w powyższych niepozornych wzorach, przekonamy się na przykładach.

Przykład 86:
Jeśli znamy $\sin x$, to ile jest równe $\sin 7x$?

Rozwiązanie:
Ktoś pamięta wzór na sinus siedmiokrotności kąta? Nie? Nie uczyli tego w szkole? Trudno. Zaraz sobie taki wzór wyprowadzimy. Dla liczby x wprowadzamy z jak powyżej, czyli

$$z=\cos x+i\sin x\,.$$

[230]Po prostu liczba z ma moduł 1 i argument x.

[231]Dla ujemnych całkowitych n też jest to prawdą, ale tego nie potrzebuję, więc po co niepotrzebnie komplikować.

[232]Jakby kto nie wiedział, to Re oraz Im oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i część urojoną liczby zespolonej, a mianowicie $\mathrm{Re}(a+bi)=a$ oraz $\mathrm{Im}(a+bi)=b$. Ponadto $\mathrm{Re} z^n$ należy interpretować jako $\mathrm{Re}(z^n)$.

Przy okazji wspaniała wiadomość dla wszystkich, którzy mają zwyczaj pisać niezbyt starannie: Jeśli ktoś bazgroli tak, że nie da się odróżnić z^{-n} od $\overline{z}^n$, to akurat w przypadku liczby z o module 1 może sobie na taką niestaranność zapisu pozwolić:

$$(\overline{z})^n=\overline{z}^n=\overline{z}^{\,n}=\overline{z}^{\,n}=\overline{z}^{\,n}=\bar{z}^{\,n}=\bar{z}^{-n}=\bar{z}^{-n}=z^{-n}=z^{-n}=z^{-n}=z^{-n}=z^{-n}=\frac{1}{z^n}$$

Wówczas

$$\sin 7x = \mathrm{Im} z^7 = \mathrm{Im}(\cos x + i\sin x)^7 =$$
$$= \mathrm{Im}\left(\cos^7 x + 7i\cos^6 x\sin x - 21\cos^5 x\sin^2 x - 35i\cos^4 x\sin^3 x + \right.$$
$$\left. +35\cos^3 x\sin^4 x + 21i\cos^2 x\sin^5 x - 7\cos x\sin^6 x - i\sin^7 x\right) =$$
$$= 7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x\,.$$

W zasadzie po pierwszej linijce powyższego wzoru można było od razu napisać ostatnią. Nie ma bowiem potrzeby wypisywania całego rozwinięcia siódmej potęgi dwumianu, jeśli z góry wiemy, które składniki wejdą w skład ostatecznego wyniku, a które znikną przy braniu części urojonej.

Skoro chcemy wyrazić $\sin 7x$ przez $\sin x$, to trzeba się jeszcze pozbyć z uzyskanego wzoru kosinusa. Wykorzystujemy do tego celu równość

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

i otrzymujemy

$$\sin 7x = 7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x =$$
$$= 7\left(1-\sin^2 x\right)^3 \sin x - 35\left(1-\sin^2 x\right)^2 \sin^3 x + 21\left(1-\sin^2 x\right)\sin^5 x - \sin^7 x =$$
$$= 7\left(1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x\right)\sin x -$$
$$-35\left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right)\sin^3 x + 21\left(1-\sin^2 x\right)\sin^5 x - \sin^7 x =$$
$$= 7\sin x - 56\sin^3 x + 112\sin^5 x - 64\sin^7 x\,.$$

Zwracam uwagę, że w uzyskanej tożsamości nie ma ani śladu liczb zespolonych. Liczby zespolone posłużyły nam tylko do wyprowadzenia wzoru, ale nie mają prawa pojawić się w uzyskanej odpowiedzi.

Przykład 87:

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \sin^3 x$.
Podać wzór na $f^{(2020)}$.
Podać taką funkcję F, że $F^{(2020)} = f$.

Rozwiązanie:

Cały problem ze sprawnym różniczkowaniem, a jeszcze większy z całkowaniem, polega na tym, że we wzorze definiującym funkcję f sinusy są przez siebie mnożone. Jakiś koszmarny wzór na pochodną wysokiego rzędu iloczynu trzech czynników jeszcze można sobie wyobrazić, ale uniwersalnego wzoru gwarantujacego całkowanie iloczynu nie mamy. Tak więc boli nas to, że sinus występuje w trzeciej potędze. Natomiast z punktu widzenia całkowania czy różniczkowania jest nam kompletnie obojętne, czy w argumencie sinusa jest goły x, czy też jakaś wielokrotność x-a. Przydałaby nam się tożsamość idąca w kierunku przeciwnym niż w poprzednim przykładzie. Tam chcieliśmy wyrazić $\sin 7x$ przez $\sin x$. I w tym wyrażeniu pojawiały się różne potęgi sinusa. Tu zależy nam na wyrażeniu $\sin^3 x$ przez sinusy i ewentualnie kosinusy, nieważne jaką wielokrotność x-a będą miały w argumencie, **byle nie były przez siebie mnożone.**

No to zaczynamy. Jak zwykle definiujemy $z=\cos x+i\sin x$ i pamiętamy o wzorach ze strony 155. Wobec tego

$$\sin^3 x=(\mathrm{Im} z)^3=???$$

Niestety, nie tędy droga. Wzorki z Re oraz Im nie nadają się do sytuacji, gdy sinusy i kosinusy są przez siebie mnożone, bo nie jesteśmy w stanie wyrazić w prosty sposób iloczynu części urojonych. Na tę właśnie okoliczność mamy drugą wersję, czysto algebraiczną, wyrażenia $\sin x$ przez z. Spokojnie, teraz się uda:

$$\sin^3 x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^3=\frac{z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3}}{-8i}=\frac{z^3-z^{-3}}{-4\cdot 2i}-\frac{3z-3z^{-1}}{-4\cdot 2i}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{z^3-z^{-3}}{2i}+\frac{3}{4}\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{-\sin 3x+3\sin x}{4}\,.$$

Otrzymaliśmy więc następujący wzór na sześcian sinusa (nie znaliście go wcześniej?):

$$\sin^3 x=\frac{-\sin 3x+3\sin x}{4}\,.$$

Wobec tego

$$f(x)=\frac{-\sin 3x+3\sin x}{4}\,.$$

Funkcję f zapisaną w tej postaci bez problemu różniczkujemy[233]:

$$f^{(2020)}(x)=\frac{-3^{2020}\cdot\sin 3x+3\sin x}{4}\,.$$

I bez problemu wypisujemy wzór na funkcję F:

$$F(x)=\frac{-3^{-2020}\cdot\sin 3x+3\sin x}{4}+W_{2019}(x)\,.$$

W powyższym wzorze $W_{2019}(x)$ jest dowolnym wielomianem stopnia co najwyżej 2019.

Przykład 88:
Obliczyć wartości sum:

$$\sin 37^\circ+\sin 157^\circ+\sin 277^\circ$$

oraz

$$\sin 37^\circ+\sin 109^\circ+\sin 181^\circ+\sin 253^\circ+\sin 325^\circ\,.$$

Rozwiązanie:
Pierwsza podana suma ma postać

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha+240^\circ)\,,$$

co w notacji używanej na analizie (argumenty w radianach) możemy przepisać jako

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\,.$$

[233] Korzystając dodatkowo z tego, że akurat mamy rok przestępny, więc daleka pochodna sinusa jest sinusem.

Okazuje się[234], że taka suma zawsze jest równa 0. Bez trudu wykażemy to korzystając z liczb zespolonych.

Niech jak zwykle $z=\cos x+i\sin x$, a ponadto niech $\xi=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ będzie zespolonym pierwiastkiem sześciennym z jedności.

Wówczas[235]

$$\sin x=\mathrm{Im} z\,,$$

$$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{Im}(z\xi)\,,$$

$$\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\mathrm{Im}\left(z\xi^2\right)\,,$$

skąd

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\mathrm{Im}\left(z\left(1+\xi+\xi^2\right)\right)\,,$$

co jest równe 0 ze względu na równość[236]

$$1+\xi+\xi^2=0\,.$$

W analogiczny sposób[237] dowodzimy ogólnej równości

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{6\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{8\pi}{5}\right)=0\,,$$

która w szczególnym przypadku daje

$$\sin 37^\circ+\sin 109^\circ+\sin 181^\circ+\sin 253^\circ+\sin 325^\circ=0\,.$$

Przykład 89:

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-3}^{2}\frac{dx}{x^2+1}\,.$$

Najtrudniejsza część zadania: uprościć wynik !!!

[234]Tylko nie mówcie, że nigdy nie widzieliście równości

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0\,.$$

Ta równość jest widoczna na słupach wysokiego napięcia, gdzie (mówiąc w uproszczeniu) mamy napięcie trójfazowe. Przewody idą w paczkach po cztery, z tego trzy grube i jeden cienki. Grube przewody odpowiadają za poszczególne fazy (sinusy w powyższej sumie), a czwarty jest neutralny – mówiąc w bardzo naiwnym uproszczeniu odpowiada on za sumę trzech sinusów, czyli zero, a w praktyce drobne szumy.

[235]Liczby z i ξ mają moduł 1, a przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

[236]Suma trzech pierwiastków z jedności jest równa 0.

[237]Zamiast pierwiastka sześciennego z jedności trzeba się posłużyć pierwiastkiem piątego stopnia.

Rozwiązanie:
Samo całkowanie nie powinno sprawiać najmniejszych trudności:

$$\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Bigg|_{x=-3}^{2} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}(-3) = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3\,.$$

I teraz dochodzimy do sedna sprawy: Czy i jak można uprościć uzyskany wynik? W tym celu trzeba byłoby umieć powiązać arcusa tangensa z liczbami zespolonymi.

Otóż[238]

$$\operatorname{arctg} x = \arg(1+xi)\,,$$

czyli $\operatorname{arctg} x$ jest argumentem liczby zespolonej $1+xi$, jeśli przyjmiemy dodatkową umowę, że w tym wypadku argument ten pochodzi z przedziału $(-\pi/2, \pi/2)$.

Ogólniejszy wzór ma postać

$$\operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \arg(a+bi)$$

i wymaga założenia $a>0$ oraz przyjęcia, że argument należy do przedziału $(-\pi/2, \pi/2)$.

W interesującym nas przykładzie

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \arg(1+2i) + \arg(1+3i) = \arg\Big((1+2i)\cdot(1+3i)\Big) = \arg(-5+5i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\,.$$

To jeszcze nie koniec, bo argument liczby zespolonej nie jest jednoznaczny, znamy go z dokładnością do wielokrotności 2π.

Jednak dodanie nierówności

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$$

daje

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi\,,$$

skąd

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4}\,.$$

[238]Zobacz skrypt dr. Elsnera, str. 142 Fakt 5.5 oraz rysunek na górze strony 143.

Przykład 90:
Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi} \sin^5 x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:
Sposób I
Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.
Przyjmijmy

$$z = \cos x + i \sin x\,,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}\,.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^5 x = \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^5 = \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i} =$$

$$= \frac{\sin 5x}{16} - \frac{5\sin 3x}{16} + \frac{5\sin x}{8}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę:

$$\int_0^{\pi} \sin^5 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin 5x}{16} - \frac{5\sin 3x}{16} + \frac{5\sin x}{8}\, dx = -\frac{\cos 5x}{80} + \frac{5\cos 3x}{48} - \frac{5\cos x}{8}\Bigg|_{x=0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{\cos 5\pi}{80} + \frac{5\cos 3\pi}{48} - \frac{5\cos \pi}{8} + \frac{\cos 0}{80} - \frac{5\cos 0}{48} + \frac{5\cos 0}{8} = \frac{1}{80} - \frac{5}{48} + \frac{5}{8} + \frac{1}{80} - \frac{5}{48} + \frac{5}{8} =$$

$$= \frac{1}{40} - \frac{5}{24} + \frac{5}{4} = \frac{3-25+150}{120} = \frac{128}{120} = \frac{16}{15}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość 16/15.

Sposób II
Podstawienie $t = \cos x$ i formalnie $dt = -\sin x\, dx$ prowadzi do

$$\int_0^{\pi} \sin^5 x\, dx = -\int_1^{-1} \left(1-t^2\right)^2\, dt = \int_{-1}^{1} t^4 - 2t^2 + 1\, dt = 2 \cdot \int_0^{1} t^4 - 2t^2 + 1\, dt =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right)\Bigg|_{t=0}^{1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = 2 \cdot \frac{3-10+15}{15} = 2 \cdot \frac{8}{15} = \frac{16}{15}\,.$$

Przykład 91:
Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<5$, że
$$\int_a^5 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Rozwiązanie:
Ponieważ
$$\int_a^5 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=a}^{5} = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} a\,,$$
pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie
$$\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1\,,$$
czyli
$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1\,.$$
Ponieważ $\operatorname{arctg} t$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ti$, otrzymujemy
$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg}(-1) = \arg(1+5i) + \arg(1-i) =$$
$$= \arg\left((1+5i)\cdot(1-i)\right) + 2k\pi = \arg(6+4i) + 2k\pi = \arg\left(1+\frac{2}{3}i\right) + 2k\pi = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi\,,$$
skąd po uwzględnieniu nierówności
$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$$
i
$$0 < \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 1 < \frac{\pi}{2}$$
wynika $k=0$ oraz $a=2/3$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a=2/3$.