Szeregi potęgowe

Szeregiem potęgowym nazywamy każdy szereg postaci[188]

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

gdzie współczynniki a_0, a_1, a_2, a_3, ... są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Można powiedzieć, że szereg potęgowy to taki wielomian[189] o nieskończonej liczbie składników.

Taki szereg potęgowy ma trzy oblicza.

Oblicze pierwsze: czysto formalistyczne. Szereg potęgowy możemy traktować jako pewien napis, czyli formalne wyrażenie i na takich wyrażeniach możemy chcieć wykonywać różne operacje. Tym się zajmować nie będziemy, bo to raczej domena algebry niż analizy.

Oblicze drugie to traktowanie szeregu potęgowego jako szeregu liczbowego z parametrem x. Tym właśnie w początkowej fazie studiowania szeregów potęgowych się zajmiemy.

I wreszcie oblicze trzecie: traktowanie szeregu potęgowego jako szeregu funkcyjnego, czyli zobaczenie w wyrazach oraz sumie szeregu nie liczb, ale funkcji. To jest oblicze najbardziej interesujące z punktu widzenia analizy i do tego właśnie zmierzamy.

Zgodnie z zapowiedzią zacznijmy od potraktowania szeregu potęgowego jako szeregu liczbowego z parametrem x. Problem, jaki nas interesuje, to wyznaczenie zbioru wszystkich x, dla których szereg jest zbieżny, czyli obszaru[190] zbieżności szeregu. Przykłady, które podam, nie będą zbyt finezyjne, bo chodzi mi o pokazanie pewnych zjawisk, a nie o zakopanie się w rachunkach.

Poczyńmy najpierw spostrzeżenie, że dla $x=0$ każdy szereg potęgowy jest zbieżny, albowiem wszystkie jego wyrazy poza ewentualnie a_0 są równe 0.

Przykład 68: Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

---

[188] Tak naprawdę to szeregiem potęgowym często nazywa się szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 + \ldots,$$

gdzie x_0 jest ustaloną liczbą rzeczywistą. I w razie potrzeby bądźmy gotowi do rozważenia szeregu takiej właśnie postaci. Ale jeśli chcemy nauczyć się badać szeregi potęgowe, to możemy dla uproszczenia przyjąć $x_0=0$. Nie wpłynie to na istotę zachodzących zjawisk.

[189] Tak jak w przypadku wielomianu przyjmujemy, że $x^0=1$ nie przejmując się, że dla $x=0$ otrzymalibyśmy wyrażenie nieoznaczone 0^0.

[190] Określenie "obszar zbieżności" jest tymczasowe. Docelowo będziemy używać innego określenia, ale nie sposób go w tej chwili wprowadzić nie zdradzając obserwacji, które wkrótce mamy poczynić.

Rozwiązanie:
Jak już przed chwilą zauważyliśmy, dla $x=0$ szereg jest zbieżny, a w przypadku $x\neq 0$ możemy zastosować kryterium d'Alemberta[191]:

$$\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right|=\frac{|x|}{n+1}\to 0\ <\ \mathbf{1}\,,$$

zatem szereg jest zbieżny dla każdego x. Obszarem zbieżności jest więc cały zbiór liczb rzeczywistych, który możemy zapisać jako przedział $(-\infty,+\infty)$.

Przykład 69: Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot x^n\,.$$

Rozwiązanie:
Dla $x=0$ szereg jest zbieżny, a w przypadku $x\neq 0$ stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{(n+1)!\cdot x^{n+1}}{n!\cdot x^n}\right|=(n+1)\cdot|x|\to\infty\ >\ \mathbf{1}\,,$$

zatem szereg jest rozbieżny dla każdego $x\neq 0$. Obszarem zbieżności jest więc zbiór jednoelementowy złożony z zera.

Przykład 70: Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,.$$

Rozwiązanie:
Szereg jest szeregiem geometrycznym o ilorazie x, jest więc zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|x|<1$. Zatem obszarem zbieżności tego szeregu jest przedział $(-1,1)$.

Przykład 71: Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}\,.$$

Rozwiązanie:
Zastosowanie kryterium d'Alemberta[192] w przypadku $x\neq 0$ prowadzi do:

$$\left|\frac{x^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot x^n}\right|=\frac{|x|}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\to\frac{|x|}{2}\ \begin{cases} <1 & \text{dla} \quad |x|<2\\ >1 & \text{dla} \quad |x|>2\end{cases}$$

Stą wniosek, że szereg jest zbieżny w przedziale $(-2,2)$, a rozbieżny poza przedziałem $[-2,2]$. Do rozstrzygnięcia pozostaje zbieżność szeregu dla $x=\pm 2$. Przyjrzyjmy się szeregowi w tych dwóch punktach:

[191] Jak to w kryterium d'Alemberta bywa, zapisujemy iloraz kolejnych dwóch wyrazów szeregu i po jego ewentualnym przekształceniu przechodzimy do granicy przy $n\to\infty$ pamiętając, aby x traktować jako parametr. Otrzymaną granicę porównujemy z jedynką i na podstawie tego porównania wnioskujemy o zbieżności lub rozbieżności szeregu.

[192] W tym wypadku można też zastosować kryterium Cauchy'ego, pod warunkiem, że pamiętamy o $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Dla $x=2$ otrzymujemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Jest to szereg rozbieżny jako szereg harmoniczny.

Dla $x=-2$ otrzymujemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Jest to szereg zbieżny jako szereg anharmoniczny[193].

Podsumowując: Obszarem zbieżności danego szeregu jest przedział $[-2, 2)$.

Przykład 72: Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 3^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie kryterium d'Alemberta w przypadku $x\neq 0$ prowadzi do:

$$\left|\frac{x^{n+1}\cdot n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}\cdot x^n}\right|=\frac{|x|}{3}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\to\frac{|x|}{3}\left\{\begin{array}{ll}<1 & \text{dla } |x|<3\\ >1 & \text{dla } |x|>3\end{array}\right.$$

Stą wniosek, że szereg jest zbieżny w przedziale $(-3, 3)$, a rozbieżny poza przedziałem $[-3, 3]$. Do rozstrzygnięcia pozostaje zbieżność szeregu dla $x=\pm 3$. Przyjrzyjmy się szeregowi w tych dwóch punktach:

Dla $x=\pm 3$ otrzymujemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n^2\cdot 3^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, skąd wynika, że dany szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Podsumowując: Obszarem zbieżności danego szeregu jest przedział $[-3, 3]$.

Przykład 73: Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot(-4)^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie kryterium d'Alemberta w przypadku $x\neq 0$ prowadzi do:

$$\left|\frac{x^{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot(-4)^n}{\sqrt{n+1}\cdot(-4)^{n+1}\cdot x^n}\right|=\frac{|x|}{4}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\to\frac{|x|}{4}\left\{\begin{array}{ll}<1 & \text{dla } |x|<4\\ >1 & \text{dla } |x|>4\end{array}\right.$$

Stą wniosek, że szereg jest zbieżny w przedziale $(-4, 4)$, a rozbieżny poza przedziałem $[-4, 4]$. Do rozstrzygnięcia pozostaje zbieżność szeregu dla $x=\pm 4$. Przyjrzyjmy się szeregowi w tych dwóch punktach:

Dla $x=4$ otrzymujemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot(-4)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Jest to szereg zbieżny jako szereg naprzemienny spełniający założenia kryterium Leibniza.

Dla $x=-4$ otrzymujemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot(-4)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Jest to szereg rozbieżny jako szereg postaci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ z $p=1/2\leqslant 1$.

Podsumowując: Obszarem zbieżności danego szeregu jest przedział $(-4, 4]$.

[193] Formalnie jest to minus szereg anharmoniczny.

Jakie spostrzeżenie nasuwa się z powyższych przykładów? Otóż w każdym rozważanym przykładzie obszarem zbieżności jest przedział, co nie jest wcale oczywiste, bo można sobie wyobrazić, że obszar zbieżności składałby się z kilku kawałków. Co więcej, w rozważanych przykładach przedział ten jest prawie symetryczny względem zera — symetria bywa łamana tylko przez przynależność końców przedziału do obszaru zbieżności.

Okazuje się, że to nie jest przypadek. Każdy szereg potęgowy ma obszar zbieżności będący przedziałem i dlatego będziemy mówili o **przedziale zbieżności.** Przedział ten może być całą prostą rzeczywstą, może degenerować się do zbioru złożonego z zera, a może też być przedziałem jednej z czterech postaci:

$$(-R, R), \qquad [-R, R], \qquad (-R, R], \qquad [-R, R).$$

W tym wypadku liczbę R będziemy nazywać promieniem[194] zbieżności szeregu potęgowego. Możemy też mówić o $R=\infty$ w przypadku szeregu zbieżnego na całej prostej oraz o $R=0$ w przypadku szeregu rozbieżnego wszędzie poza zerem.

W najbliższym czasie poćwiczymy sobie wyznaczanie przedziału lub promienia[195] zbieżności różnych szeregów potęgowych, a potem przejdziemy do tego, co w analizie najciekawsze — w wyrazach szeregu potęgowego oraz w jego sumie będziemy dostrzegać funkcje.

Uwaga 1:

Przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 + \ldots$$

jest całą prostą rzeczywistą, zbiorem $\{x_0\}$ lub jest jednej z czterech postaci:

$$(x_0-R, x_0+R), \qquad [x_0-R, x_0+R], \qquad (x_0-R, x_0+R], \qquad [x_0-R, x_0+R).$$

Uwaga 2:

Jeśli szereg potęgowy ma dużo wyrazów zerowych, to możemy go zapisać w postaci sumy, w której zerowe wyrazy są pominięte, a numerowanie obejmuje wyrazy niezerowe. Na przykład szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

gdzie $a_n=1$ dla n parzystych oraz $a_n=0$ dla n nieparzystych, wygodniej jest zapisać jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} .$$

[194] Skąd nazwa promień? Za kilka tygodni to sobie wyjaśnimy, a na razie musi to pozostać zagadką.

[195] Samego promienia zbieżności szukamy wtedy, gdy nie zależy nam na badaniu szeregu potęgowego na końcach przedziału zbieżności lub gdy rozstrzyganie zbieżności na końcach przedziału zbieżności jest zbyt trudne.

Szeregi potęgowe: wyznaczanie przedziału lub promienia zbieżności

Przykład 74:
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^n}{n!}\,.$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{3n+3}{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot \binom{3n}{n} \cdot x^n}\right| = \left|\frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x}{(n+1)} \cdot \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}}\right| =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x| \cdot \frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)} \to \frac{27e \cdot |x|}{4}$$

przy $n \to \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu równej $\frac{27e \cdot |x|}{4}$.

Jeżeli $\frac{27e \cdot |x|}{4} < 1$, czyli $|x| < \frac{4}{27e}$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{27e \cdot |x|}{4} > 1$, czyli $|x| > \frac{4}{27e}$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $\frac{4}{27e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{4}{27e}$.

Przykład 75:
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n}\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(2n+2)! \cdot x^{2n+2}}{(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot n^n}{(2n)! \cdot x^{2n}}\right| =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot|x|^2}{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} =$$

$$=\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{x^2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\to 4\cdot\frac{x^2}{e}\,.$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $4\cdot\frac{x^2}{e}$.

Jeżeli $4\cdot\frac{x^2}{e}<1$, czyli $|x|<\frac{\sqrt{e}}{2}$, to szereg (1) jest zbieżny.
Jeżeli zaś $4\cdot\frac{x^2}{e}>1$, czyli $|x|>\frac{\sqrt{e}}{2}$, to szereg (1) jest rozbieżny.
Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Przykład 76:
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot\binom{3n}{n}\cdot x^{3n}}{n!\cdot 2^n}\,. \tag{2}$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (2) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(n+1)^{n+1}\cdot\binom{3n+3}{n+1}\cdot x^{3n+3}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot 2^n}{n^n\cdot\binom{3n}{n}\cdot x^{3n}}\right|=\left|\frac{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot x^3}{(n+1)\cdot 2}\cdot\frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}}\right|=$$

$$=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot|x|^3}{2}\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}\to\frac{27e\cdot|x|^3}{8}$$

przy $n\to\infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (2) równej $\frac{27e\cdot|x|^3}{8}$.

Jeżeli $\frac{27e\cdot|x|^3}{8}<1$, czyli $|x|<\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{e}}$, to szereg (2) jest zbieżny.
Jeżeli zaś $\frac{27e\cdot|x|^3}{8}>1$, czyli $|x|>\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{e}}$, to szereg (2) jest rozbieżny.
Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{e}}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{e}}$.

Przykład 77:
Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}\cdot x^{n^2}}{(n!)^n}\,. \tag{3}$$
Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu (3) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x.

Otrzymujemy
$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^{n^2}\cdot x^{n^2}}{(n!)^n}\right|}=\frac{n^n\cdot|x|^n}{n!}=b_n\,.$$
Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n):
$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)^{n+1}\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n\cdot|x|^n}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1)\cdot|x|}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot|x|\to e\cdot|x|\,.$$
Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (b_n) równej $e\cdot|x|$.

Jeżeli $e\cdot|x|<1$, czyli $|x|<\frac{1}{e}$, to ciąg (b_n) jest zbieżny do $0<1$, a w konsekwencji szereg (3) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e\cdot|x|>1$, czyli $|x|>\frac{1}{e}$, to ciąg (b_n) jest rozbieżny do $+\infty>1$, a w konsekwencji szereg (3) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy $\frac{1}{e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{e}$.

Przykład 78:
Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)\cdot x^n}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}\,.$$
Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu potęgowego traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy
$$\left|\frac{(2n+3)\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)\cdot(2n+9)\cdot x^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)\cdot(n+5)}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)\cdot x^n}\right|=$$
$$=\frac{n\cdot(2n+9)\cdot|x|}{(n+5)\cdot(2n+1)}\to|x|$$
przy $n\to\infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów danego szeregu potęgowego równej $|x|$.

Jeżeli $|x|<1$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $|x|>1$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy 1.

Dla $x=1$ otrzymujemy szereg, który na mocy kryterium porównawczego jest rozbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+0)\cdot(2n+0)\cdot(2n+0)\cdot(2n+0)}{n\cdot(n+n)\cdot(n+2n)\cdot(n+3n)\cdot(n+4n)} =$$

$$= \frac{1}{15}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Dla $x=-1$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)\cdot(-1)^n}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}\,,$$

który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{5}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{7}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot0}{1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1} = 0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)} \geqslant \frac{(2n+3)\cdot(2n+5)\cdot(2n+7)\cdot(2n+9)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)\cdot(n+5)}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{2n+1}{n} \geqslant \frac{2n+9}{n+5}\,,$$

$$(2n+1)\cdot(n+5) \geqslant (2n+9)\cdot n\,,$$

$$2n^2+11n+5 \geqslant 2n^2+9n\,,$$

$$2n+5 \geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny dla $x=-1$ na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma przedział zbieżności $[-1,\,1)$.

Uwaga: Stosowanie kryterium d'Alemberta nie jest konieczne, ale jego unikanie nie wydaje się specjalnie praktyczne. Można bowiem wyobrazić sobie następujące rozwiązanie:

• Jakimś sposobem zgadujemy, że promień zbieżności jest równy 1.

• Dowodzimy jak w przedstawionym rozwiązaniu, że szereg jest rozbieżny dla $x=1$ i zbieżny dla $x=-1$.

• Przedstawiamy rozumowanie, z którego wynika, że jeśli szereg jest rozbieżny dla $x=1$ i zbieżny dla $x=-1$, to jego promień zbieżności jest równy 1.

Szeregi potęgowe — sumowanie

Tuż przed majowym weekendem nie chcę Wam psuć dobrego nastroju, dlatego omawianie własności sum szeregów potęgowych jest w sam raz — można wykazywać się tu pełną beztroską. Jak się przekonamy w maju, w przypadku innych szeregów funkcyjnych może być fatalnie. Ale póki co cieszmy się dniem dzisiejszym, czyli szeregami potęgowymi, a tu jest wprost cudownie.

Pierwszą dobrą nowinę już znamy: Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest przedziałem[196]. Nie docenimy tego, dopóki w przyszłości nie zobaczymy szeregów funkcyjnych, dla których obszar zbieżności może być bardzo kapryśnym i dziurawym zbiorem.

No dobrze, więc sytuacja jest taka: Mamy szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Przyjmijmy, że jego promień zbieżności R jest dodatni (może być nieskończony), bo z szeregiem zbieżnym tylko w zerze niewiele ciekawego da się zrobić. Zatem szereg jest zbieżny w przedziale $(-R, R)$. Jeśli R jest skończone, to może do tego przedziału zbieżności da się włączyć jeden lub oba końce[197].

Jak dotąd, traktowaliśmy szereg potęgowy jak szereg liczbowy z parametrem x. Skoro jednak szereg ten jest zbieżny dla każdego $x \in (-R, R)$, to możemy z sum tego szeregu skomponować funkcję $f:(-R, R) \to \mathbb{R}$ przyjmując

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Ponieważ funkcja f powstała z wysumowania szeregu osobno dla każdej wartości parametru x, a następnie pozbierania tych sum w jedną funkcję, można się obawiać, że sumy te, czyli wartości funkcji f, będą wymieszane bez ładu i składu. Tu jednak czeka nas: **Druga dobra nowina: Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą.** Oczywiście pamiętamy, że dziedziną tej funkcji jest przedział zbieżności szeregu potęgowego. Wprawdzie szereg potęgowy nie musi być zbieżny na całej prostej, ale tam gdzie jest zbieżny, jego suma tworzy funkcję ciągłą.

[196] Wprawdzie ten przedział może się degenerować do zbioru jednopunktowego, ale jesteśmy przyzwyczajeni do tego, że szereg może być po prostu rozbieżny i wówczas żaden z niego pożytek. Najważniejsze, że dla szeregów potęgowych zbieżnych choć trochę poza zerem, jest fajnie.

[197] Będę dla ustalenia uwagi pisał $(-R, R)$, żeby nie utonąć w rozpatrywaniu różnych przypadków, ale będziemy rozumieć, że w tym miejscu może się pojawić równie dobrze $(-R, R]$, $[-R, R)$ lub $[-R, R]$.

Na razie traktujmy tę nowinę jako dar od losu — kiedy w maju zapoznamy się z namiastką teorii szeregów funkcyjnych, poznamy trochę mechanizmów, dzięki którym szeregi potęgowe tak fajnie się zachowują.

Skoro suma szeregu potęgowego jest ciągła, to zapytajmy: a może jest także różniczkowalna? Okazuje się, że tak. Co więcej, można różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem.

Trzecia dobra nowina: Suma szeregu potęgowego jest funkcją różniczkowalną, a sam szereg można różniczkować wyraz za wyrazem.

Oznacza to tyle, że jeśli

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

to f jest różniczkowalna, a ponadto

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} ,$$

czyli w tym wypadku pochodna sumy jest sumą pochodnych, nieważne, że suma ma nieskończenie wiele składników.

Trzeba tu podkreślić, że szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ po formalnym zróżniczkowaniu prowadzi do szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ o tym samym promieniu zbieżności — przedział zbieżności może się jednak zmniejszyć o tyle, że mogą z niego wypaść końce.

Czwarta dobra nowina: Suma szeregu potęgowego jest funkcją różniczkowalną nieskończenie wiele razy, a sam szereg można różniczkować wyraz za wyrazem dowolnie wiele razy.

To jest prosty wniosek z trzeciej nowiny — skoro suma szeregu potęgowego jest różniczkowalna, a jej pochodna też jest sumą szeregu potęgowego, to można ten proces powtórzyć dowolnie wiele razy.

Wobec tego dla każdej liczby naturalnej k mamy

$$f^{(k)}(x)=\frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^k}{dx^k}a_n x^n=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k} .$$

Podsumujmy: Suma szeregu potęgowego w przedziale zbieżności jest bardzo porządną funkcją, bo różniczkowalną nieskończenie wiele razy. Ponadto szereg potęgowy można różniczkować wyraz za wyrazem, czyli jest obojętne, czy najpierw go wysumujemy, a sumę zróżniczkujemy, czy też najpierw zróżniczkujemy każdy składnik, a potem wysumujemy pochodne składników. Wewnątrz przedziału zbieżności powyższe zachodzi bez zastrzeżeń. Na końcu przedziału zbieżności też jest OK, ale pod warunkiem, że szereg odpowiednich pochodnych jest zbieżny, i że zamiast pochodnej rozważamy odpowiednią pochodną jednostronną.

Popatrzmy teraz na przykłady.

Na początek najprostszy z nietrywialnych szeregów: szereg geometryczny. Wiemy dobrze, gdzie jest zbieżny i jaką ma sumę.

Przykład 79:

Dla $x\in(-1,\,1)$ przyjmijmy

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\,. \tag{$\spadesuit$}$$

Skoro szereg potęgowy można różniczkować wyraz za wyrazem, to można i całkować, ale trzeba tu nieco ostrożności ze względu na niejednoznaczność wynikającą ze stałej całkowania. Wobec tego przyjmując[198]

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

otrzymujemy $F'(x)=f(x)$ dla $x\in(-1,\,1)$. Zauważmy jednak, że funkcja f jest określona na przedziale $(-1,\,1)$, natomiast funkcja F jest określona i ciągła na przedziale $[-1,\,1)$, bo tamże jest zbieżny szereg potęgowy ją definiujący. Ponadto dla $x\in(-1,\,1)$ mamy

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{dx}{(1-x)}=-\ln(1-x)+C\,.$$

Ponieważ $F(0)=0$, otrzymujemy[199]

$$0=-\ln(1-0)+C\,,$$

skąd $C=0$ i w konsekwencji $F(x)=-\ln(1-x)$ dla $x\in(-1,\,1)$, a przejście do granicy przy $x\to-1^+$ pozwala rozszerzyć równość $F(x)=-\ln(1-x)$ do $x\in[-1,\,1)$.

Wniosek:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\qquad\text{dla}\qquad x\in[-1,\,1)\,,$$

co można też przepisać w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=\ln(1+x)\qquad\text{dla}\qquad x\in(-1,\,1]\,. \tag{$\heartsuit$}$$

Kładąc w ostatniej równości $x=1$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2\,,$$

czyli w inny sposób niż poprzednio doszliśmy do sumy szeregu anharmonicznego. Jednak tym razem suma szeregu anharmonicznego nie jest jakąś tam liczbą wyciągniętą z kapelusza — widzimy bowiem, że logarytm naturalny daje się zapisać jako suma szeregu potęgowego zgodnie ze wzorem ($\heartsuit$), a szereg anharmoniczny to właśnie ten szereg dla $x=1$.

[198]To jest po prostu szereg ze wzoru ($\spadesuit$) scałkowany wyraz za wyrazem.
[199]Przyjmując $x=0$.

Przykład 80:
Dla $x \in (-1, 1)$ przyjmijmy

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Scałkujmy powyższy szereg wyraz za wyrazem przyjmując

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Wówczas $F'(x)=f(x)$ dla $x\in(-1,1)$. Odnotujmy, że funkcja f jest okreśona na przedziale $(-1, 1)$, natomiast funkcja F jest określona i ciągła na przedziale $[-1, 1]$, bo właśnie tam jest zbieżny szereg potęgowy ją definiujący. Ponadto dla $x \in (-1, 1)$ mamy

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C\,.$$

Ponieważ $F(0)=0$, otrzymujemy[200]

$$0=\operatorname{arctg} 0+C\,,$$

skąd $C=0$ i w konsekwencji $F(x)=\operatorname{arctg} x$ dla $x\in(-1, 1)$, a przejście do granicy przy $x\to -1^+$ i przy $x\to 1^-$ pozwala rozszerzyć tę równość do $x\in[-1, 1]$.

Wniosek:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arctg} x \qquad \text{dla} \qquad x\in[-1, 1]\,.$$

Podstawiając w ostatniej równości $x=1$ otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}\,,$$

czyli

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots$$

Naiwnie można by sądzić, że otrzymujemy wzór

$$\pi=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}+\ldots\,,$$

dzięki któremu można obliczać przybliżoną wartość liczby π. Niestety, ten szereg jest dość wolno zbieżny, więc przy dużym nakładzie pracy otrzymamy niezbyt dobre przybliżenie.

Na przykład obliczenie sumy tysiąca początkowych wyrazów prowadzi do

$$\sum_{n=0}^{999}\frac{(-1)^n\cdot 4}{2n+1}=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}+\ldots-\frac{4}{1999}\approx 3,140592654\,,$$

podczas gdy $\pi\approx 3,141592654$. Dostajemy więc poprawnie tylko dwie[201] cyfry przybliżenia po przecinku.

---

[200] Przyjmując $x=0$.

[201] Cały dowcip polega na tym, że widzimy osiem poprawnych cyfr. Tyle że osiem z dziewięciu: pierwsza, druga i od czwartej do dziewiątej. Z kolei uwzględnienie 10 milionów wyrazów daje tylko 6 cyfr:

$$\sum_{n=0}^{9\,999\,999}\frac{(-1)^n\cdot 4}{2n+1}=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\ldots-\frac{4}{19\,999\,999}\approx 3,141592\mathbf{5}53589793238462\mathbf{89}338327950288$$

przy $\pi\approx 3,141592\mathbf{6}5358979323846\mathbf{64}338327950288$. Chociaż przy odrobinie dobrej woli można dostrzec 20 cyfr (z 21) lub 32 cyfry (z 35). Ale to już zupełnie inna historia.

Szereg Taylora

Zastanówmy się teraz nad następującym zagadnieniem: Dany jest szereg potęgowy o dodatnim[202] promieniu zbieżności R. Znamy funkcję f będącą jego sumą w przedziale[203] $(-R, R)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

Czy na podstawie znajomości funkcji f możemy odtworzyć szereg potęgowy, którego jest ona sumą?

Okazuje się, że tak. Wystarczy bowiem zauważyć, że skoro szereg można różniczkować wyraz za wyrazem dowolnie wiele razy, to dla każdej liczby całkowitej nieujemnej[204] k otrzymujemy

$$f^{(k)}(x)=\frac{d^k}{dx^k}f(x)=\frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^k}{dx^k}a_n x^n=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}\,,$$

skąd po podstawieniu $x=0$ dostajemy[205]

$$f^{(k)}(0)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n 0^{n-k}=k!\cdot a_k\,.$$

Wobec tego

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

Mamy więc procedurę odtworzenia współczynników szeregu potęgowego na podstawie funkcji będącej jego sumą: współczynikami tymi są pochodne sumy w zerze podzielone przez odpowiednie silnie.

Aby taka procedura dała się zastosować do funkcji f, wystarczy, aby funkcja f miała w zerze pochodne wszystkich rzędów. Innymi słowy z funkcją f mającą w zerze pochodne wszystkich rzędów możemy związać szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\,,$$

który jest jedynym kandydatem na szereg potęgowy sumujący się do f. Szereg taki nazywamy szeregiem Taylora[206] funkcji f.

---

[202] Być może nieskończonym.

[203] Mniejsza o ewentualną zbieżność na końcach — i tak w tym akurat miejscu nie robilibyśmy z niej żadnego użytku.

[204] Dla $k=0$ też się to broni, chociaż wygląda dziwnie. Jednak włączamy ten przypadek do ogólnego schematu dla jednolitości otrzymywanych wzorów.

[205] Pamiętając, że w kontekście wielomianów i szeregów potęgowych $x^0=1$, także $0^0=1$.

[206] Celowo wyraziłem się tu trochę nieprecyzyjnie, żeby nie wprowadzać niepotrzebnych komplikacji. W rzeczywistości mówiąc o szeregu Taylora funkcji f powinniśmy jeszcze dopowiedzieć, w którym punkcie x_0 ten szereg tworzymy (u nas $x_0=0$). Wówczas szereg ten ma postać

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,.$$

Ponadto szereg Taylora w zerze (właśnie taki rozpatrujemy) nazywany bywa szeregiem Maclaurina, ale bardziej odpowiada mi używanie tu nazwiska Taylora.

To teraz naturalne jest pytanie takie: Dana jest funkcja f mająca w zerze pochodne wszystkich rzędów. Możemy stworzyć jej szereg Taylora. Czy wówczas funkcja f jest jego sumą?

Przypomina to trochę prymitywną[207] sztuczkę, która ma sugerować, że znam na pamięć piąte potęgi liczb jednocyfrowych. Wybierzcie jakąś cyfrę, podnieście ją do piątej potęgi, a ja błyskawicznie powiem, jaką cyfrę wybraliście. Podaliście 16807? Aha, to jest piąta potęga liczby 7. Na czym polega trik? Otóż cyfra jedności zachowuje się przy podnoszeniu do piątej potęgi. Wobec tego wybraną przez Was cyfrą jest cyfra jedności podanej przez Was piątej potęgi. Tak właśnie wygląda procedura wyciągania pierwiastka piątego stopnia z liczb mniejszych od 100 000 będących piątymi potęgami — w odpowiedzi podajemy cyfrę jedności.

A jeśli podacie mi liczbę 12342? To zgodnie z procedurą odpowiem: To jest piąta potęga liczby 2. Nie działa? No tak, bo procedura pierwiastkowania przez podawanie cyfry jedności daje się zastosować do każdej liczby, i dla każdej liczby daje **jakiś** wynik, ale tylko dla piątych potęg daje wynik zgodny z naszymi oczekiwaniami.

To wzbudza pewien niepokój, jeśli chodzi o szereg Taylora, bo:

Jaką mamy gwarancję, że funkcja jest sumą swojego szeregu Taylora?

I właśnie nadszedł czas, aby zburzyć błogi spokój związany z beztroską, z jaką można traktować szeregi potęgowe.

Przypomnijmy przykład z pierwszego semestru:

Przykład:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

Przypomnę, że tak zdefiniowana funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na całej prostej, jest dodatnia poza zerem, a w zerze ma pochodne wszystkich rzędów równe 0. Wobec tego jej szereg Taylora jest szeregiem zerowym.

Czyli tak: funkcja jest bardzo porządna[208], jej szereg Taylora jest świetnie zbieżny[209], ale suma tego szeregu Taylora nie ma wiele wspólnego z samą funkcją, bo suma szeregu Taylora jest zerowa, a funkcja jest dodatnia poza zerem.

Wobec tego spotkała nas:

Przykrość 1: Suma szeregu Taylora może być różna od funkcji.

[207]Dla celów ilustracyjnych taka prymitywna sztuczka w zupełności wystarczy. Gdyby ktoś chciał sztuczki poważniejszej, to musiałby się nauczyć piątych potęg liczb jednocyfrowych, co jest równoważne zapamiętaniu piątych potęg dwucyfrowych wielokrotności dziesiątki. Wówczas mógłby znajdować podstawy piątych potęg liczb dwucyfrowych: cyfra jedności podstawy jest cyfrą jedności piątej potęgi, a cyfra dziesiątek podstawy może być określona przez porównanie podanej piątej potęgi z piątymi potęgami wielokrotności dziesiątki.

[208]Ma nieskończenie wiele pochodnych na całej prostej — chyba lepiej się nie da.

[209]Czy ktoś zna szereg lepiej zbieżny niż szereg zerowy?

Ale to nie koniec złych wieści. Otóż okazuje się, że **każdy szereg potęgowy jest szeregiem Taylora pewnej funkcji**[210]**.** Udowodnienie tego, czy choćby naszkicowanie dowodu, wykracza poza ramy tego wykładu. W każdym razie nawet taki szereg jak znany nam $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, który jest rozbieżny wszędzie poza zerem, jest szeregiem Taylora jakiejś funkcji.

Tym samym spotyka nas:

Przykrość 2: Szereg Taylora może być rozbieżny poza zerem.

Podsumowując:

Jeśli funkcja f jest sumą szeregu potęgowego, to szeregiem tym jest jej szereg Taylora. Jeśli zaś weźmiemy jakąkolwiek funkcję f mającą pochodne wszystkich rzędów wokół zera, to jej szereg Taylora może być rozbieżny wszędzie poza zerem, a nawet jak jest zbieżny, to jego suma może mieć niewiele wspólnego z samą funkcją.

Ale nie martwcie się, głowa do góry. Zaraz poznamy przykłady funkcji, które jednak są sumami swoich szeregów Taylora i wyjaśnimy sobie, że nie jest to takie rzadkie zjawisko.

Przykład 81:

Zbadać szereg Taylora w zerze funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=e^x .$$

Ponieważ $f^{(n)}(x)=e^x$ oraz $f^{(n)}(0)=1$, szeregiem Taylora funkcji f w zerze jest szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Szereg ten jest zbieżny na całej prostej rzeczywistej, ale czy jego sumą jest funkcja f?

Narzędziem, które tu wykorzystamy, jest wzór Taylora, który przypomnę w wersji ogólnej:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_N(x)$$

oraz szczególnej przy $x_0=0$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_N(x) .$$

Składnik $R_N(x)$ jest N-tą resztą wzoru Taylora i odpowiada za błąd, jaki popełniamy przybliżając funkcję f wielomianem. Są różne postacie reszty wzoru Taylora, ale my używaliśmy

$$R_N(x)=\frac{f^{(N)}(x_0+t_x(x-x_0))}{N!}\cdot(x-x_0)^N \qquad t_x\in(0,1) ,$$

gdzie argument $x_0+t_x(x-x_0)$ jest po prostu jakimś punktem pomiędzy x_0 i x.

[210] I to bardzo porządnej, bo nieskończenie wiele razy różniczkowalnej na całej prostej.

Dla $x_0=0$ mamy prostszą wersję:

$$R_N(x)=\frac{f^{(N)}(t_x\cdot x)}{N!}\cdot x^N \qquad\qquad t_x\in(0,\,1)\,.$$

Nie sposób nie zauważyć, że składniki we wzorze Taylora są identyczne jak w szeregu Taylora. Nie jest to przypadek, wszak jedno i drugie usiłuje zrobić z funkcji wielomian. Wzór Taylora mówi, że funkcję można przybliżyć wielomianem, a za błąd jaki w tym wypadku popełniamy odpowiada reszta wzoru Taylora. Natomiast szereg Taylora jest tymże wielomianem ze wzoru Taylora wysumowanym do nieskończoności, czyli szeregiem potęgowym. W jednym i drugim przypadku współczynniki wielomianu odczytujemy z pochodnych funkcji w punkcie x_0, gdyż tym najlepszym wielomianem jest wielomian mający takie same pochodne w x_0 jak funkcja f.

Wróćmy do funkcji z rozważanego przykładu. Aby udowodnić, że dla każdego x szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

jest zbieżny do $f(x)=e^x$, trzeba udowodnić, że ciąg sum częściowych

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}$$

jest zbieżny do $f(x)$. Ponieważ[211]

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}=f(x)-R_{N+1}(x)\,,$$

musimy dowieść, że $R_{N+1}(x)$ dąży[212] do zera. W tym celu trzeba oszacować $|R_{N+1}(x)|$ od góry przez wyrażenie dążace do 0 przy $N\to\infty$.

Wprawdzie wzór na $R_{N+1}(x)$ jest niezbyt precyzyjny, ale w zupełności wystarczający do oszacowań, jeśli rozumiemy choć trochę jak wyglądają pochodne funkcji f. W naszym przypadku

$$|R_{N+1}(x)|=\left|\frac{f^{(N+1)}(t_x\cdot x)}{(N+1)!}\cdot x^{N+1}\right|=\left|\frac{e^{t_x\cdot x}}{(N+1)!}\cdot x^{N+1}\right|=\frac{e^{t_x\cdot x}}{(N+1)!}\cdot|x|^{N+1}\leqslant\frac{e^{|x|}}{(N+1)!}\cdot|x|^{N+1}\,.$$

W oszacowaniach skorzystaliśmy z nierówności

$$t_x\cdot x\leqslant|t_x\cdot x|=|t_x|\cdot|x|\leqslant|x|\,.$$

Przy ustalonym $x\neq0$ zbieżność ciągu $\left(\frac{e^{|x|}}{(N+1)!}\cdot|x|^{N+1}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ do zera dowodzimy korzystając z wersji kryterium d'Alemberta dla ciągów:

$$\frac{\frac{e^{|x|}}{(N+2)!}\cdot|x|^{N+2}}{\frac{e^{|x|}}{(N+1)!}\cdot|x|^{N+1}}=\frac{|x|}{N+2}\to0<1\,.$$

Tym samym udowodniliśmy, że szereg Taylora funkcji f jest do niej zbieżny na całej prostej i bez skrępowania możemy zapisać[213]:

[211] Jest to delikatnie przekształcony wzór Taylora z poprzedniej strony w wersji $x_0=0$ i $N+1$ zamiast N.
[212] Przy ustalonym x, gdy $N\to\infty$.
[213] I koniecznie zapamiętać !!!

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{10}}{10!}+\ldots \qquad (\clubsuit)$$

Płynie stąd w szczególności wniosek[214], że

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+\ldots$$

Nie sposób oprzeć się następującej uwadze: Funkcja wykładnicza określona wzorem e^x ma tę własność, że jest sama swoją pochodną. Także otrzymany przez nas szereg ma tę własność, że różniczkując go formalnie wyraz za wyrazem otrzymujemy ten sam szereg. Nic dziwnego, jeśli zważymy, że funkcja przedstawia się jako suma tego szeregu. Uwaga ta może być jednak poczyniona bez żadnych oszacowań korzystających ze wzoru Taylora. Oczywiście bez oszacowań pozwala ona tylko wysnuć hipotezę, że między funkcją wykładniczą $f(x)=e^x$ i szeregiem ze wzoru $(\clubsuit)$ jest jakiś związek.

Przykład 82:
Zbadać szereg Taylora w zerze funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sin x\,.$$

Ponieważ

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^{n/2}\cdot\sin x & \text{dla } n \text{ parzystych}\\ (-1)^{(n-1)/2}\cdot\cos x & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$$

oraz

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{dla } n \text{ parzystych}\\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$$

szeregiem Taylora funkcji f w zerze jest szereg[215]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Udowodnienie, że szereg ten jest zbieżny do funkcji f sprowadza się, podobnie jak w poprzednim przykładzie, do wykazania, że przy ustalonym x reszty wzoru Taylora dążą do zera[216]:

$$|R_{N+1}(x)|=\left|\frac{f^{(N+1)}(t_x\cdot x)}{(N+1)!}\cdot x^{N+1}\right|=\left|\frac{\mathrm{jsin}\,(t_x\cdot x)}{(N+1)!}\cdot x^{N+1}\right|=\frac{|\,\mathrm{jsin}\,(t_x\cdot x)|}{(N+1)!}\cdot|x|^{N+1}\leqslant\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\,.$$

Przy ustalonym $x\neq 0$ zbieżność ciągu $\left(\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ do zera dowodzimy korzystając z wersji kryterium d'Alemberta dla ciągów:

$$\frac{|x|^{N+2}/(N+2)!}{|x|^{N+1}/(N+1)!}=\frac{|x|}{N+2}\to 0<1\,.$$

[214]Jeśli we wzorze $(\clubsuit)$ przyjmiemy $x=1$.
[215]Po odpowiednim przenumerowaniu wyrazów.
[216]W międzyczasie posiłkujemy się oznaczeniem *jsin* dla funkcji "jakiś sinus", którą może być $\pm\sin$ lub $\pm\cos$.

Udowodniliśmy więc, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots$$

Analogicznie można wykazać, że dla każdego x prawdziwy jest wzór

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

Do kompletu przypomnijmy też trzy rozwinięcia uzyskane wcześniej:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots \qquad \text{dla } x\in(-1,1]$$

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\ldots \qquad \text{dla } x\in[-1,1]$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

Przykład 83:
Zbadać szereg Taylora w zerze funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=e^{x^2}.$$

Wypisanie szeregu Taylora tej funkcji przez obliczenie jej pochodnych w zerze byłoby trochę skomplikowane, bo trudno od ręki podać wzór na pochodną funkcji f dalekiego rzędu.

Jednak z równości

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

wynika[217], że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x)=e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Skoro f jest przedstawiona w postaci sumy szeregu potęgowego, to jest to jej szereg Taylora. W szczególności możemy z tego szeregu odczytać pochodne funkcji f w zerze:

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n/2)!} & \text{dla } n \text{ parzystych}\\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$$

[217] Po podstawieniu x^2 w miejsce x.

A teraz kilka zdań komentarza dotyczącego materii wykraczającej poza ramy tego wykładu.

Z jednej strony widzieliśmy, że szereg Taylora funkcji nieskończenie[218] różniczkowalnej nie musi być zbieżny do samej funkcji. Z drugiej zaś zobaczyliśmy przykłady, w których tak jest: funkcja wyraża się przy pomocy szeregu potęgowego, czyli swojego szeregu Taylora. Procedura dowodzenia takiej zbieżności[219] jest dość żmudna. Okazuje się jednak, że wśród funkcji można wyróżnić tak zwane funkcje analityczne. Z definicji są to funkcje o dziedzinie będącej przedziałem otwartym[220], które wokół każdego punktu swojej dziedziny wyrażają się przy pomocy sumy szeregu potęgowego. Funkcja analityczna jest więc lokalnie sumą swojego szeregu Taylora. Póki co wygląda to trochę na masło maślane, bo skoro definiujemy funkcje analityczne jako będące sumami szeregów potęgowych, to cóż to za rewelacja, że okazują się one być sumami szeregów potęgowych. Przecież to właśnie założyliśmy w definicji.

Okazuje się, że analityczne są podstawowe funkcje, które znamy: wielomiany, funkcje wykładnicze, logarytmiczne, potęgowe w $(0,\infty)$, trygonometryczne, odwrotne do trygonometrycznych. Ponadto wykonywanie czterech działań na funkcjach analitycznych oraz składanie funkcji analitycznych prowadzi do funkcji analitycznych. Także funkcja odwrotna do funkcji analitycznej o pochodnej różnej od zera[221] jest analityczna.

Morał[222] z tej opowiastki płynie następujący: każda funkcja zdefiniowana "ładnym wzorkiem" jest analityczna, czyli lokalnie jest sumą swojego szeregu Tayora. Trzeba tu jednak uważać na konstrukcje typu $|x|=\sqrt{x^2}$, co jest w pewnym sensie "ładnym wzorkiem", ale definiuje funkcję nieróżniczkowalną, a więc nieanalityczną. Aby uniknąć tego typu niespodzianek, trzeba używać funkcji określonych na przedziałach otwartych. Tu problem wziął się z zera pod pierwiastkiem — pierwiastek nie jest określony na zbiorze otwartym zawierającym zero w swoim wnętrzu.

Funkcja

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

omawiana wcześniej, nie jest analityczna, bo wokół zera nie jest sumą swojego szeregu Taylora[223]. Żeby skonstruować taką funkcję, musiałem użyć klamerek, gdyż nie da się takiej funkcji zapisać "ładnym wzorkiem". Jednak funkcja ta jest analityczna w przedziale $(-\infty,0)$ i jest też analityczna w przedziale $(0,\infty)$.

[218]"Funkcja nieskończenie różniczkowalna" to skrócona forma od "funkcja nieskończenie wiele razy różniczkowalna", czyli mająca pochodne wszystkich rzędów. Czasami używa się też krótszego sformułowania "funkcja gładka", ale nie jest to sformułowanie uniwersalne, bo czasami mówi się o funkcji, że jest gładka, gdy ma tyle pochodnych, ile wynika z kontekstu — na przykład dwie, pięć lub siedemnaście.

[219]Na przykład z wykorzystaniem wzoru Taylora.

[220]Może mieć końce w $\pm\infty$.

[221]To znaczy: o pochodnej, która nigdzie się nie zeruje.

[222]Morał ten ma jedynie charakter informacyjny, ponieważ teoria funkcji analitycznych wykracza poza program wykładu.

[223]Przypominam, że szereg Taylora tej funkcji w zerze to szereg zerowy.

Na koniec jeszcze jedna własność funkcji analitycznych. Otóż funkcje nieskończenie różniczkowalne są giętkie w tym sensie, że jeśli znam funkcję $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ na przedziale[224] $(0,1)$, to nie mam bladego pojęcia[225], jak wygląda ona na przedziale $(2,3)$.

Funkcje analityczne natomiast są sztywne, to znaczy, że funkcja analityczna na $\mathbb{R}$ jest jednoznacznie wyznaczona[226] przez swoje wartości na przedziale $(0,1)$.

[224] Tu i dalej podane przedziały są przykładowe.

[225] Jeśli np. wiem, że $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ oraz $f(x)=\sin x$ dla $x\in(0,1)$, to mogę mieć

$$f(x)=e^x \qquad \text{dla } x\in(2,3)$$

albo mogę mieć

$$f(x)=\sqrt{x} \qquad \text{dla } x\in(2,3)$$

albo jak mnie poniesie fantazja, równie dobrze mogę mieć

$$f(x)=\cos\left(e^{x^{\pi}}+\sqrt{17}\right) \qquad \text{dla } x\in(2,3)\,.$$

[226] Innymi słowy: Jeśli funkcje f i g są analityczne na $\mathbb{R}$ oraz $f(x)=g(x)$ dla $x\in(0,1)$, to wówczas $f(x)=g(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.