

Całki niewłaściwe¹²⁶

Ile jest równe pole kwadratu o boku 1? Chyba to nie jest wystarczająco poważne pytanie. To może to pole kwadratu obliczmy przy użyciu całki. Powiedzmy z funkcji stałej równej 1 na przedziale $[0, 1]$, czyli

$$\int_0^1 1 \, dx.$$

Nadal mało poważne? No to może wykonajmy jakieś podstawienie, na przykład $x = \sqrt{t}$, co da formalny wzór $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Otrzymujemy całkę¹²⁷

$$\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} \Big|_{t=0}^1 = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1.$$

Wyszło, że pole kwadratu jest równe 1. Uffff... Zgadza się. Jest dobrze.

To wobec tego dwa pytania:

1° Skoro to jest dobrze, to dlaczego to jest źle?

2° Skoro to jest źle, to dlaczego jednak jest dobrze?

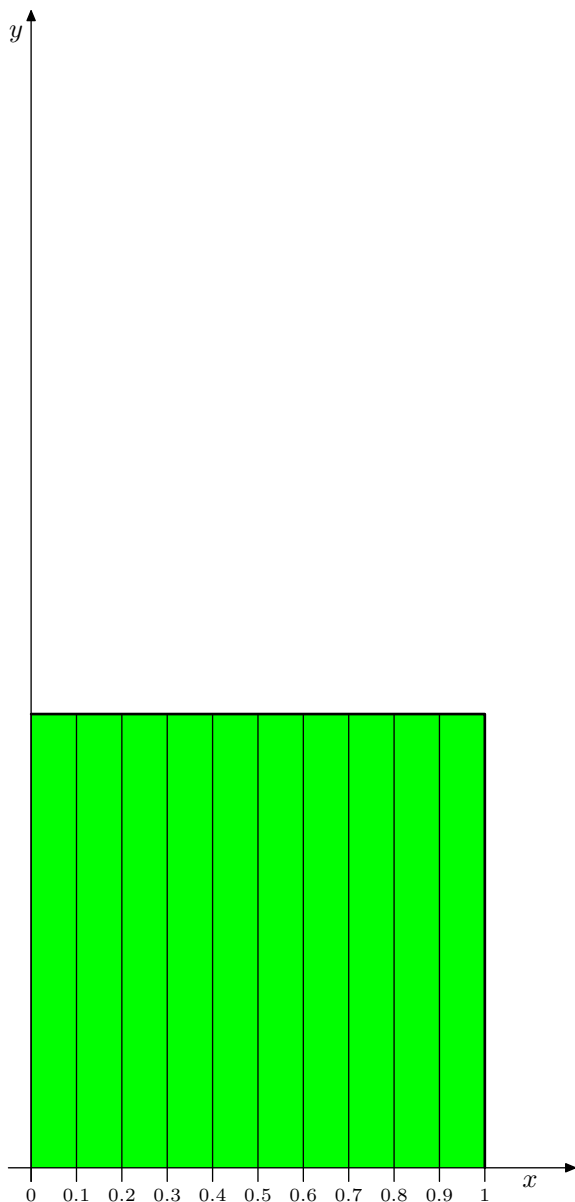
Bardzo fajnie się bezmyślnie liczyło całkę $\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, ale zgodnie z naszymi dotychczasowymi umowami, ta całka nie ma sensu. Umówiliśmy się bowiem, że całkujemy tylko funkcje ograniczone, gdyż tylko takie funkcje prowadzą do figur ograniczonych.

¹²⁶Całki niewłaściwe **nie** wchodzą w zakres materiału obowiązującego na kolokwium 3, które odbędzie się we wtorek 13 kwietnia 2021 r.

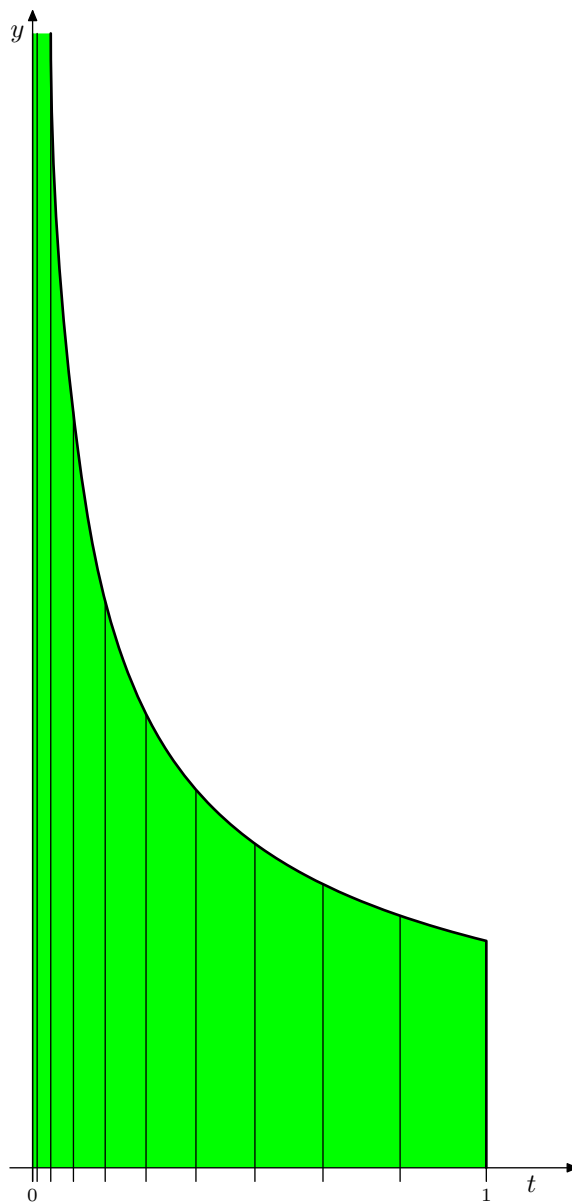
¹²⁷Pamiętałem o zmianie granic całkowania. Naprawdę !!!

Tymczasem podstawienie, które wykonaliśmy, dosyć mocno zdeformowało kwadratowy obszar pod wykresem funkcji (rys. 44). Z prawej strony kwadrat był rozciągany w poziomie, więc dla zachowania pola zapadł się w pionie – przy prawym brzegu prawie dwukrotnie. Z kolei blisko lewego brzegu deformacja w poziomie powodowała niemiłosiernie ściskanie obszaru, przez co dla zachowania pola wypiętrzył się on do nieskończoności (rys. 45). W zasadzie wydaje się, że przy tej deformacji pole powinno się zachować¹²⁸, ale czym jest pole nieograniczonej figury, takiej jak na rysunku 45?

Przy definicji pola umieszczaliśmy figury w wielokątach, a figury nieograniczonej nie da się w umieścić wielokącie¹²⁹.



rys. 44



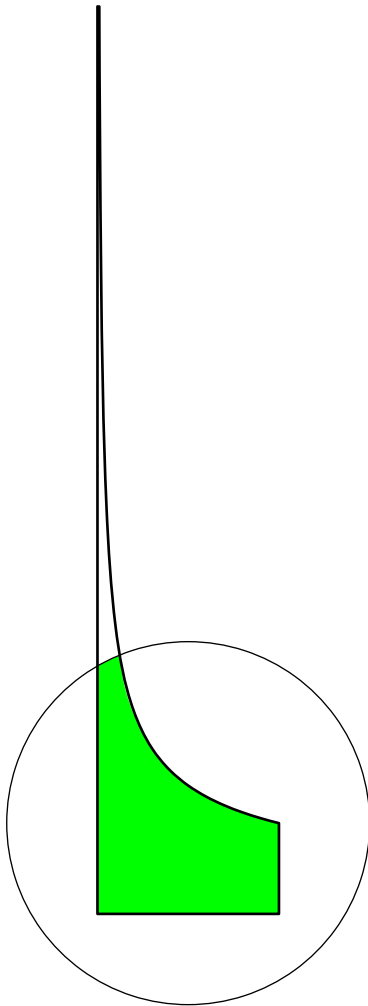
rys. 45

¹²⁸Pionowe kreski powinny ułatwić prześledzenie jak jest deformowany kwadrat.

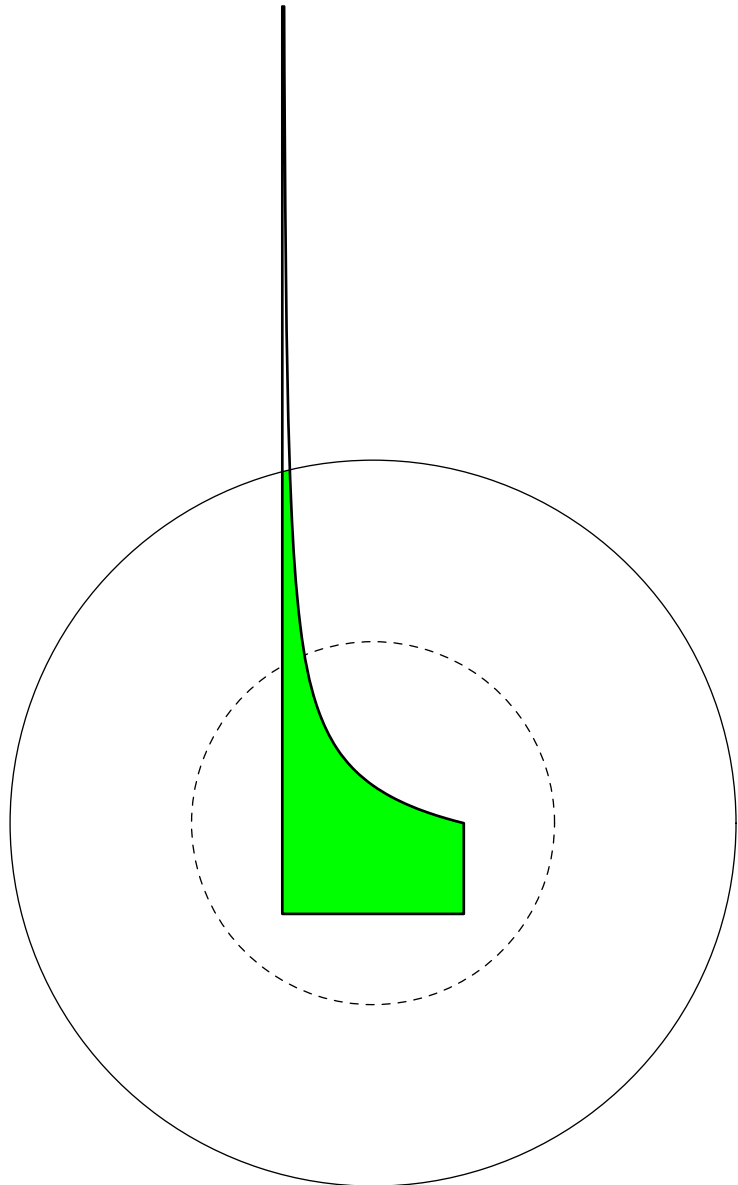
¹²⁹Kto by pomyślał, że prościutkie podstawienie w prościutkiej całce doprowadzi do takich kłopotów...

Otóż pole figury nieograniczonej definiuje się następująco:
 Obcinamy figurę do coraz większych kół¹³⁰ (rys. 46 i 47). Jeżeli te przekroje mają pola¹³¹,
 to jest sens mówić o polu figury i jest ono granicą¹³² pól przekrojów figury z kołami
 o ustalonym środku i promieniu dążącym do nieskończoności.

Jest w sumie obojętne, czy będziemy rozważać przecięcia figury z kołami, czy z siedem-
 nastokątami foremnymi, czy też będziemy ją okrawać w inny sposób, byle odpowiedni¹³³.



rys. 46



rys. 47

¹³⁰ A dokładniej: rozważamy przekroje figury z tymi kołami.

¹³¹ Czyli są mierzalne.

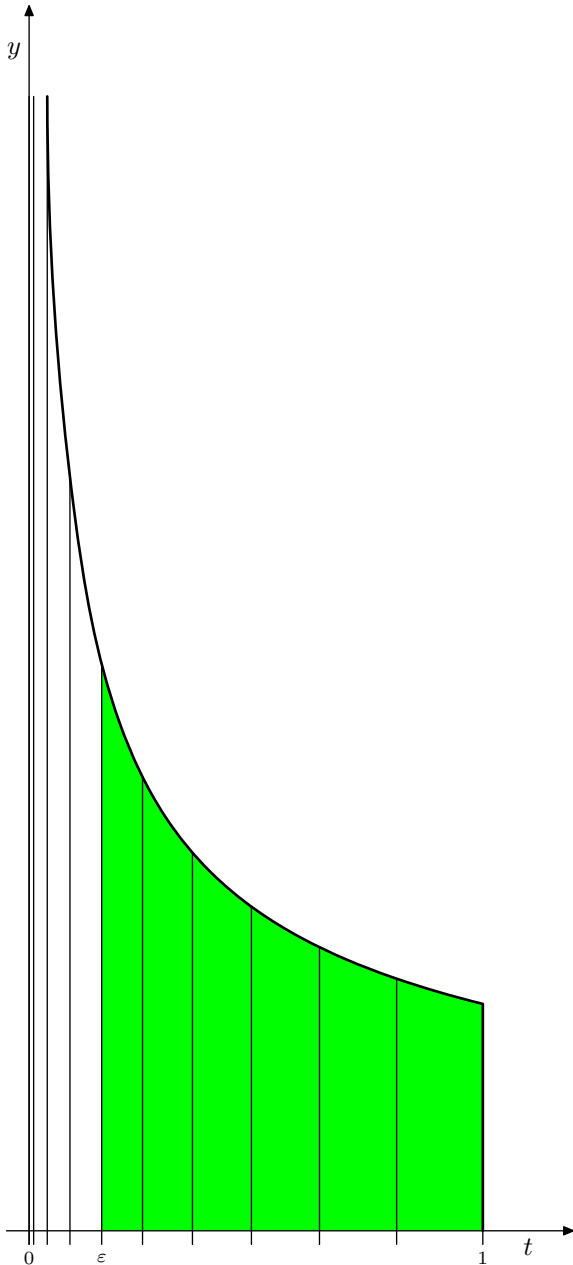
¹³² Może to być granica niewłaściwa $+\infty$. Wówczas powiemy, że figura ma nieskończone pole.

¹³³ Nie będę precyzował, co słowo "odpowiedni" tu znaczy.

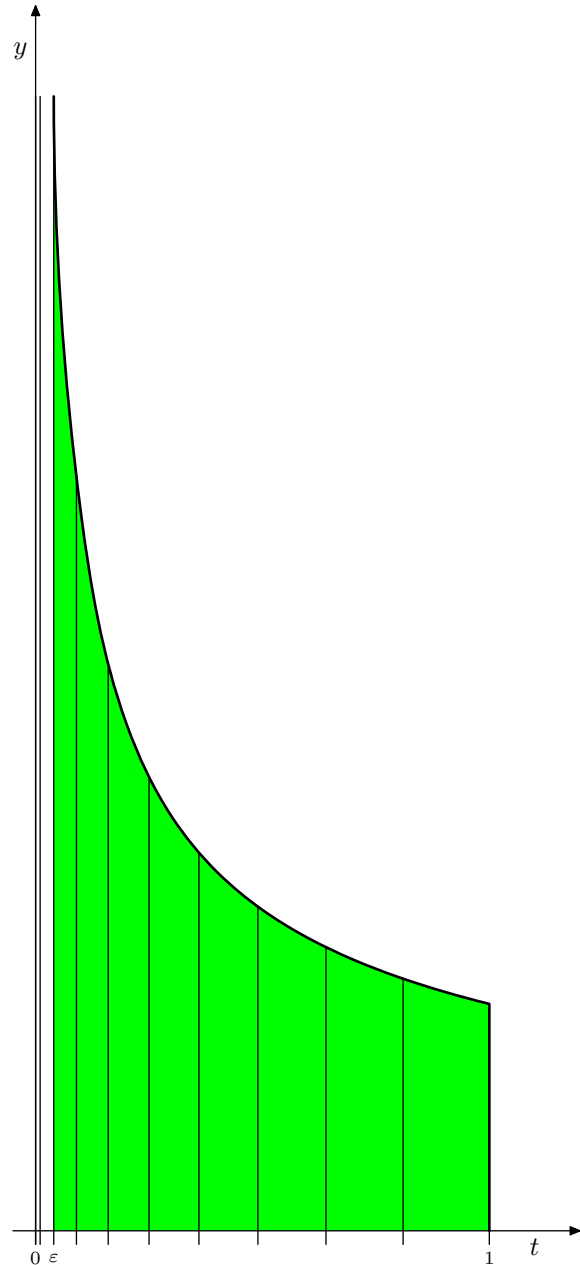
Pozbądźmy się wypiętrzenia obszaru koło zera poprzez odcięcie wąziutkiego pionowego paska¹³⁴ przy lewym brzegu (rys. 48 i 49). Jeśli pasek ten ma szerokość ε , to pole okrojonego obszaru jest równe

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} \Big|_{t=\varepsilon}^1 = 1 - \sqrt{\varepsilon},$$

co dąży do 1 przy $\varepsilon \rightarrow 0$.



rys. 48



rys. 49

¹³⁴Może wyglądać dziwnie, że akurat tak okrawamy obszar, ale zależy nam na tym, aby pole okrojonego obszaru dało się liczyć przy pomocy całki.

To był wstęp do pojęcia całki niewłaściwej. Czym właściwie jest całka niewłaściwa, opowiem Wam za chwilę.

A na razie powinniście zapamiętać tyle:

Można myśleć o całce

$$\int_a^b f(x) dx,$$

gdzie $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła¹³⁵. Funkcja f może mieć w pobliżu a jakąś osobliwość, na przykład może dążyć do nieskończoności albo szaleńczo oscylować. Na pewno istnieją całki

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

gdzie ε jest dodatnie i nie za duże¹³⁶. Wówczas definiujemy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Oczywiście, jak to z granicą bywa, może istnieć albo nie.

- Jeśli ta granica istnieje i jest liczbą skończoną, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna i przypiszemy jej otrzymaną wartość liczbową.
- Jeśli ta granica istnieje jako granica niewłaściwa $+\infty$ albo $-\infty$, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **rozbieżna** i przypiszemy jej otrzymaną wartość $\pm\infty$.
- Jeśli ta granica nie istnieje nawet jako granica niewłaściwa, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **rozbieżna** i nie przypiszemy jej żadnej wartości.

Nie trzeba się bawić ze zmianą granicy całkowania. Rozważaną przez nas całkę niewłaściwą można obliczać tak:

$$\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} \Big|_{t=0}^1 = \sqrt{1} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\varepsilon} = 1 - 0 = 1.$$

Pamiętajmy, że całka ma osobliwość w dolnej granicy całkowania. Licząc przyrost funkcji pierwotnej, możemy napisać w dolnej granicy $t=0$, ale w kontekście osobliwości funkcji podcałkowej nie oznacza to podstawienia $t=0$ do funkcji pierwotnej, ale wzięcie prawostronnej granicy funkcji pierwotnej w zerze.

¹³⁵Uwaga: przedział otwarty z lewej strony.

¹³⁶Bo nie chcemy, aby $a+\varepsilon > b$.

Po tym wstępie czas na nieco dokładniejsze wyjaśnienie, czym są całki niewłaściwe i jak się je oblicza. Na razie zajmiemy się przypadkiem, gdy funkcja podcałkowa jest ciągła wewnątrz przedziału całkowania.

W tej chwili nie będziemy się jeszcze zajmować badaniem zbieżności całek niewłaściwych w oparciu o inne kryteria niż bezpośrednie usiłowanie wyliczenia wartości.

Całką niewłaściwą jest całka

$$\int_a^b f(x) dx,$$

gdzie funkcja f jest ciągła na przedziale (a, b) , ale sama całka w co najmniej jednym końcu przedziału całkowania ma osobliwość. Osobliwość całki może być osobliwością funkcji f , ale może też być związana z przedziałem całkowania, gdyż dopuszczamy $a = -\infty$ oraz $b = +\infty$.

Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to¹³⁷

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Przy tym całka jest rozbieżna, jeśli co najmniej jedna z powyższych granic nie istnieje¹³⁸.

A teraz kilka przykładów.

Przykład 55:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy całkowanie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

Przykład 56:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt{x}$, czyli $x = t^2$ przy założeniu $t \geq 0$, skąd dostajemy formalny wzór $dx = 2t dt$. Przy tym podstawieniu przedziałowi całkowania $x \in (0, \infty)$ odpowiada przedział $t \in (0, \infty)$.

¹³⁷W przypadku, gdy $a = -\infty$ lub $b = +\infty$ nie piszemy znaków granic jednostronnych. A ponadto w przypadku $a = -\infty$ możemy dolną granicę przyrostu zapisać jako $-\infty$, jeśli razi nas $x = -\infty$.

¹³⁸To znaczy, że nie jest liczbą skończoną.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} &= \int_0^{\infty} \frac{2t dt}{t + t^3} = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=0}^{\infty} = \\ &= 2 \cdot \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} t \right) - 2 \cdot \operatorname{arctg} 0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość π .

Przykład 57:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 1} &= \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}, \\ 1 &= A \cdot (x+1) + B \cdot (x-1), \\ 1 &= Ax + A + Bx - B, \\ \begin{cases} 0 &= A + B \\ 1 &= A - B \end{cases} \end{aligned}$$

Bez trudu otrzymujemy $A = 1/2$ i $B = -1/2$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} &= \int_3^{\infty} \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_3^{\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \Big|_{x=3}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{-\ln 2 + 2 \cdot \ln 2}{2} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 2}{2}$.

Uwaga: Całki

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_3^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{2}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

Przykład 58:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^4-1} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^4-1} &= \frac{x}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \\ x &= A \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x^2+1) + (Cx+D) \cdot (x^2-1), \\ x &= Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D, \\ &\begin{cases} 0 &= A+B+C \\ 0 &= A-B+D \\ 1 &= A+B-C \\ 0 &= A-B-D \end{cases} \end{aligned}$$

Konfrontacja równań drugiego i czwartego daje $D=0$, natomiast odjęcie stronami równań pierwszego i trzeciego prowadzi do $C=-1/2$. Uwzględnienie tych wartości pozostawia równania

$$\begin{cases} 1/2 &= A+B \\ 0 &= A-B \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $A=B=1/4$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{x}{x^4-1} dx &= \int_2^{\infty} \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1} - \frac{x/2}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \cdot \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \Bigg|_{x=2}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \right) \right) - \frac{\ln 1}{4} - \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 5}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{4}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5 - \ln 3}{4}$.

Uwaga: Całki

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x+1} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+1)}{4}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

Uwaga 2: Prostsze rachunki otrzymamy wykonując podstawienie $t = x^2$.

Przykład 59:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{x-5}{x^3-x} dx$ i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 0.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x-5}{(x-1) \cdot x \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1},$$

$$x-5 = A \cdot x \cdot (x+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x+1) + C \cdot (x-1) \cdot x.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A , B i C , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -1 otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x=1 \quad -4 = 2A, \quad \text{skąd} \quad A = -2,$$

$$\text{dla } x=0 \quad -5 = -B, \quad \text{skąd} \quad B = 5,$$

$$\text{dla } x=-1 \quad -6 = 2C, \quad \text{skąd} \quad C = -3.$$

Wobec tego

$$\int_2^{\infty} \frac{x-5}{x^3-x} dx = \int_2^{\infty} -\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x} - \frac{3}{x+1} dx = -2 \cdot \ln|x-1| + 5 \cdot \ln|x| - 3 \cdot \ln|x+1| \Big|_{x=2}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (-2 \cdot \ln|x-1| + 5 \cdot \ln|x| - 3 \cdot \ln|x+1|) \right) + 2 \cdot \ln 1 - 5 \cdot \ln 2 + 3 \cdot \ln 3 =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^5}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} =$$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3} \right) + \ln \frac{27}{32} = \ln 1 + \ln \frac{27}{32} = \ln \frac{27}{32} < \ln 1 = 0.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln \frac{27}{32} < 0$.

Uwaga: Całki $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx$, $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$, $\int_2^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$ są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x-1|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln |x+1|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

* * * * * * * * * * * * *

Tu się zakończył wykład w środę 31 marca 2021 r.

* * * * * * * * * * * * *

Całki niewłaściwe – badanie zbieżności

A teraz zajmiemy się badaniem zbieżności całek niewłaściwych, w których funkcja podcałkowa jest nieujemna. Taka całka jest geometrycznym polem pewnej figury, na ogół nieograniczonej. Zbieżność takiej całki jest równoznaczna ze skończonością takiego pola. A sama całka zawsze albo ma wartość skończoną, albo jest rozbieżna do $+\infty$.

Do tego celu posłużą nam dwa elementy:

- kryterium porównawcze,
- rodzina całek o znanej zbieżności, do której będziemy porównywać¹³⁹ badaną całkę.

Najpierw kryterium porównawcze. Nie mówi ono nic więcej niż to, że większe od dużego jest duże, a mniejsze od małego jest małe.

A konkretnie: załóżmy, że $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, funkcje $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, a ponadto dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzą nierówności

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Jeżeli całka $\int_a^b f(x) dx$ jest rozbieżna, to całka $\int_a^b g(x) dx$ też jest rozbieżna.

Jeżeli całka $\int_a^b g(x) dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^b f(x) dx$ też jest zbieżna.

Obie powyższe implikacje są równoważne¹⁴⁰, więc po co dwa razy powtarzać to samo? Po prostu wygodnie jest pamiętać obydwie wersje i korzystać z tej, która jest nam aktualnie potrzebna.

¹³⁹Przez odpowiednie szacowanie.

¹⁴⁰Każda jest transpozycją drugiej.

Dla całek niewłaściwych o nieujemnej funkcji podcałkowej nie musimy słowami wypowiadać faktu ich zbieżności bądź rozbieżności. Wystarczy napisać całkę oraz ∞ i postawić między nimi znak równości lub ostrą nierówność.

W praktyce stosowanie kryterium porównawczego sprowadza się do szacowań, które zapisujemy w ciągu nierówności tak:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \dots \text{ tu leżą jakieś szacowania } \dots \leq \int_a^b g(x) dx < \infty \quad 141$$

albo tak:

$$\int_a^b g(x) dx \geq \dots \text{ tu leżą jakieś szacowania } \dots \geq \int_a^b f(x) dx = \infty. \quad 142$$

Do tego wszystkiego potrzebujemy wzorcowych całek, których zbieżność sobie raz rozstrzygniemy bezpośrednim całkowaniem, i do których będziemy porównywać inne całki.

Nie będę się silił na wielkie ogólności, z których niewiele wynika. Dlatego przedstawiona rodzina całek będzie możliwie prosta, ale wystarczająca, aby zaobserwować najciekawsze zjawiska.

Oto nasze wzorce:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad \text{oraz} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

Wyliczamy bezpośrednio¹⁴³

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 x^{-p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{1-p} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} 1/(1-p) & \text{dla } p < 1 \\ +\infty & \text{dla } p > 1 \end{cases}$$

Natomiast dla $p = 1$ otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=0}^1 = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty.$$

Wniosek: Całka $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ jest zbieżna dla $p < 1$ i rozbieżna dla $p \geq 1$.

¹⁴¹I formułujemy wniosek: całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna.

¹⁴²I formułujemy wniosek: całka $\int_a^b g(x) dx$ jest rozbieżna.

¹⁴³Przy założeniu $p \neq 1$.

Podobnie postępujemy z drugą całką:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} -1/(1-p) & \text{dla } p > 1 \\ +\infty & \text{dla } p < 1 \end{cases}$$

Dla $p = 1$ otrzymujemy

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty.$$

Wniosek: Całka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna dla $p \leq 1$.

Wniosek: Całka $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ jest rozbieżna dla każdego p . Jednak jeżeli $p \neq 1$, to niecałkowalna osobliwość jest tylko w jednym końcu przedziału całkowania.

Przykład 60:

Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4}$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4} = \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4} + \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4} \leq \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{0 + x^4} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo $4 - \pi < 1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{5-\pi}} < +\infty,$$

bo $5 - \pi > 1$.