

## Obliczanie pól figur na płaszczyźnie.

A teraz opowiem Wam o zastosowaniu całek do obliczania wielkości (pól i długości) różnych figur płaskich.

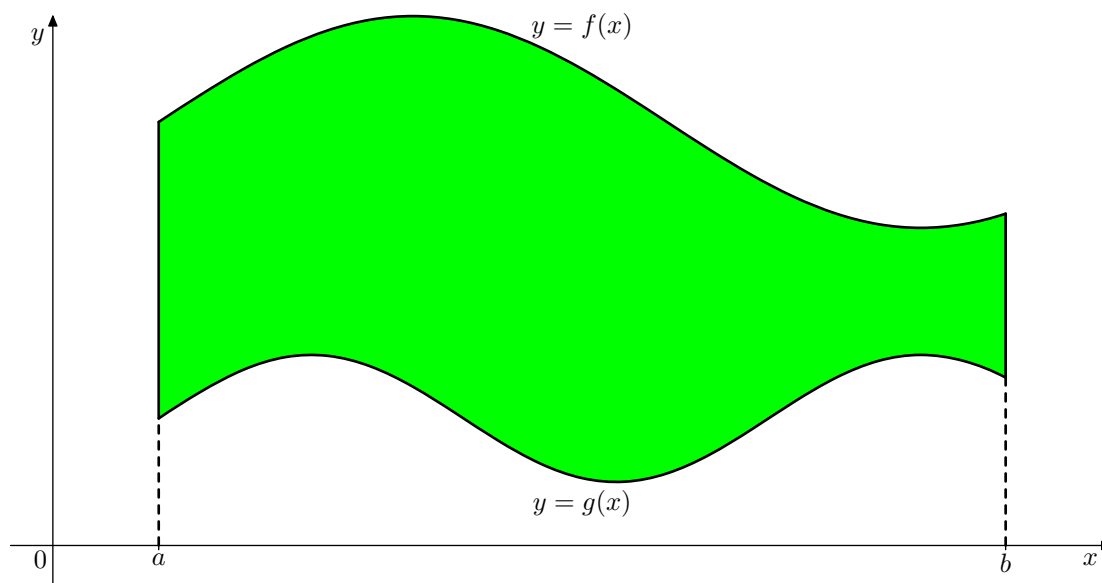
Na początek zagadnienie dość proste, więc nie poświęcę mu zbyt wiele uwagi.

Otóż przy pomocy całki oznaczonej można wyrazić pole obszaru o szczególnej postaci.

Niech dane będą funkcje ciągłe<sup>97</sup>  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające dla każdego  $x \in [a, b]$  warunek  $f(x) \geq g(x)$ . Interesuje nas pole obszaru

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

zamalowanego na zielono na rysunku 26.



rys. 26

Pole to wyraża się wzorem

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

W przypadku, gdy  $f$  i  $g$  przyjmują tylko wartości nieujemne, zielony obszar to obszar pod wykresem funkcji  $f$  z usuniętym obszarem pod wykresem funkcji  $g$ , ma więc on pole

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

I na tej uwadze, jeśli chodzi o wyjaśnienie powyższego wzoru, poprzestaną, koncentrując się na kolejnym, znacznie mniej oczywistym zagadnieniu.

<sup>97</sup>Wystarczy, że funkcje te są całkwalne, ale nie ma sensu topić istoty sprawy w niuansach dotyczących możliwego poluzowania założeń.

## Długość krzywej na płaszczyźnie.

Czym jest długość krzywej? To pytanie nie na miejscu, jeśli najpierw nie odpowiemy sobie, czym jest krzywa. I czym jest krzywa, której długość można obliczać. Naiwne i zbyt swobodne rozumienie słowa "krzywa" może w skrajnym przypadku doprowadzić do patologii w stylu krzywej Peano<sup>98</sup>, a przecież nie o to nam tu chodzi.

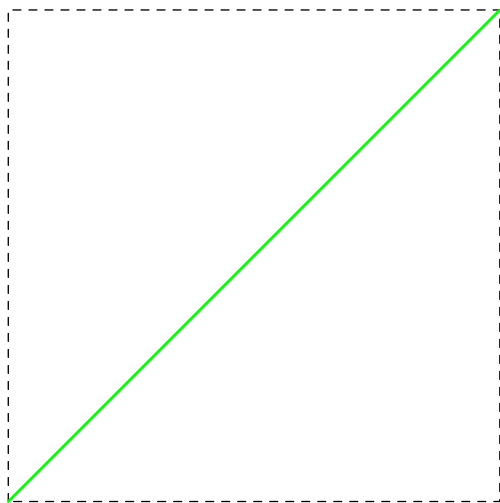
Odłożmy na razie problem wyjaśniania, czym jest krzywa, a skoncentrujmy się na zdefiniowaniu i obliczaniu długości krzywych, jeśli już to sobie kiedyś doprecyzujemy.

Jak definiowaliśmy i obliczaliśmy pola figur? Ano wykorzystywaliśmy do tego pewne szablony – proste figury, których wartość pola nie budziła żadnych wątpliwości. Tymi szablonami przybliżaliśmy coraz lepiej interesującą nas figurę, uzyskując coraz lepsze przybliżenie jej pola. Taka jest intuicja. Oczywiście musiało to mieć jakąś w miarę precyzyjną techniczną oprawę, ale istota polegała na przybliżaniu figury.

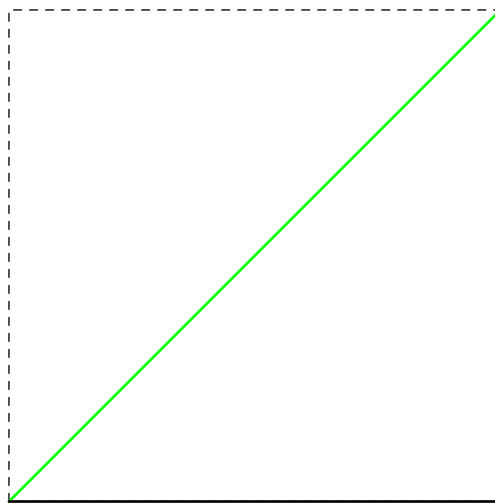
Korzystaliśmy z takiego oto, jak się okazało słusznego, założenia, że dobre przybliżenie figury daje dobre przybliżenie pola.

Do przybliżania obszarów pod wykresem funkcji wystarczyły w zupełności figury zbudowane z prostokątów. I takie proste szablony spróbujemy wykorzystać do obliczenia długości przekątnej kwadratu<sup>99</sup> o boku 1 (rys. 27).

Żeby nie paprać się z twierdzeniem Pitagorasa i pierwiastkami, przybliżajmy tę przekątną łamanymi złożonymi tylko z odcinków poziomych i pionowych<sup>100</sup>. Coraz lepsze tego typu przybliżenia możemy zaobserwować na rysunkach 28–32.



rys. 27

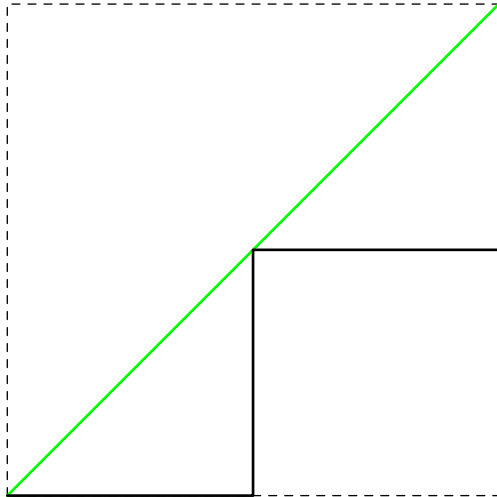


rys. 28

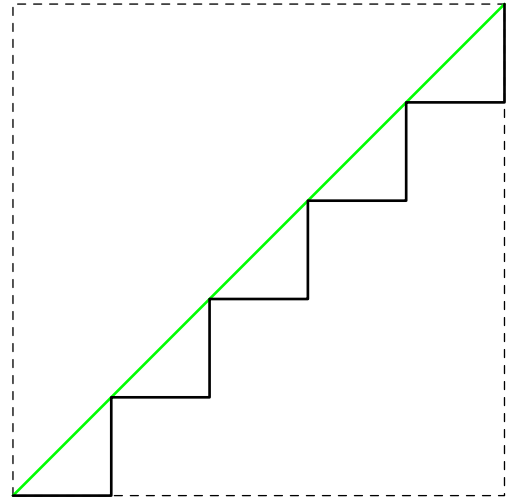
<sup>98</sup>Jest to "krzywa", która jest pełnym kwadratem. Pogooglaj sobie, jeśli Cię to interesuje.

<sup>99</sup>Najprzyjemniej oblicza się wielkości, których wartość już znamy.

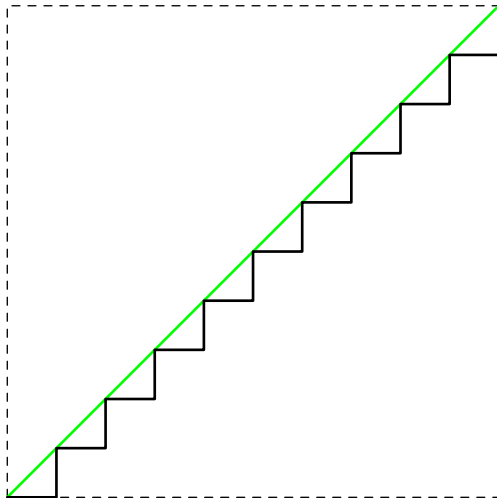
<sup>100</sup>Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że odcinki łamanej mają równą długość.



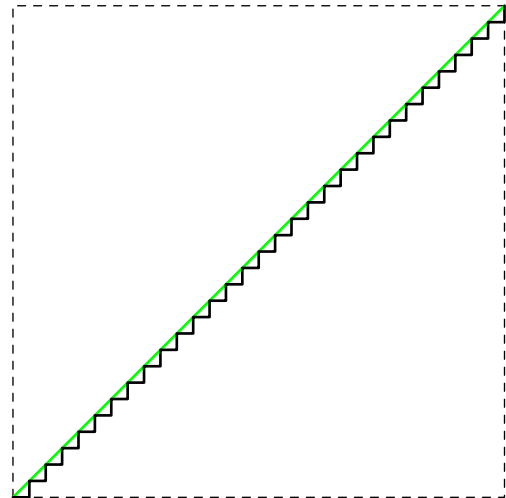
rys. 29



rys. 30



rys. 31



rys. 32

Bez trudu wyliczamy długość każdej z rozważanych łamanych – jest ona równa 2, gdyż odcinki pionowe tej łamanej mają łączną długość 1 i odcinki poziome też mają długość 1. Skoro przekątną kwadratu można dowolnie dobrze przybliżyć krzywą (w tym wypadku łamaną) o długości 2, to wychodziłoby z tego, że przekątna kwadratu o boku 1 ma długość 2. Podejrzewam, że w szkole uczono Was czegoś innego.

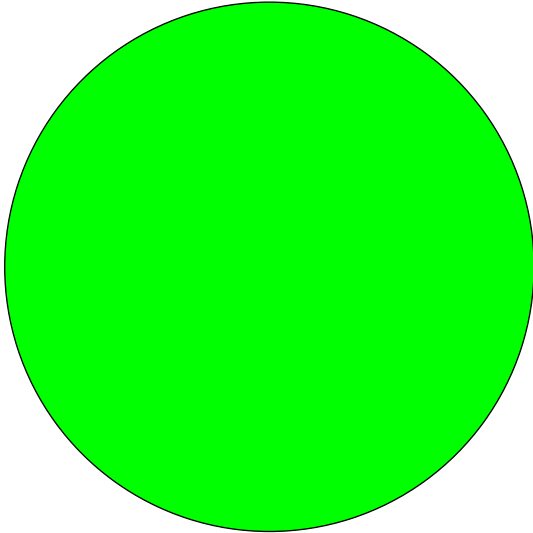
Morał stąd jest następujący:

**Dobre<sup>101</sup> przybliżenie krzywej inną krzywą nie musi prowadzić do dobrego przybliżenia jej długości.**

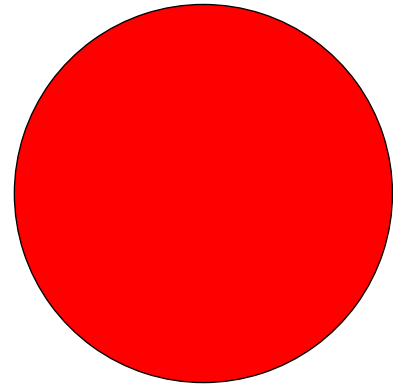
---

<sup>101</sup>W naiwnym rozumieniu.

Popatrz teraz na rysunki 33 i 34 i odpowiedz na dwa pytania:  
Która figura ma większe pole: czerwona czy zielona?  
Obwód której figury ma większą długość: czerwonej czy zielonej?



rys. 33



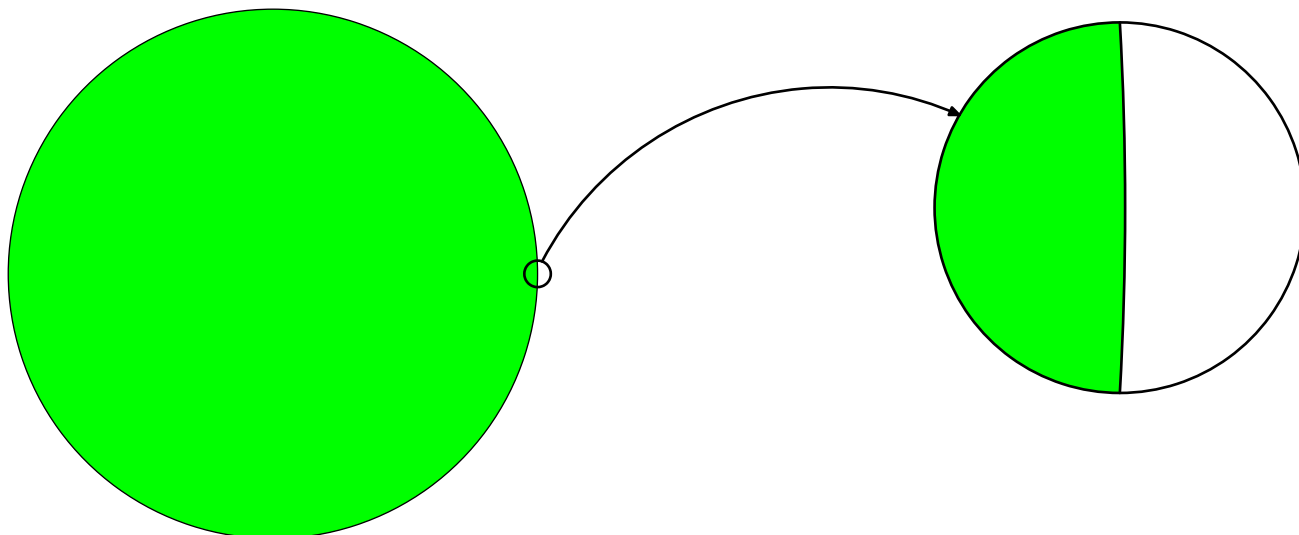
rys. 34

Jeśli twierdzisz, że większe pole ma figura zielona, trudno się z tym spierać. Nawet jeśli rysunek nie jest superdokładny, można z niego wzrokowo oszacować pola poszczególnych figur.

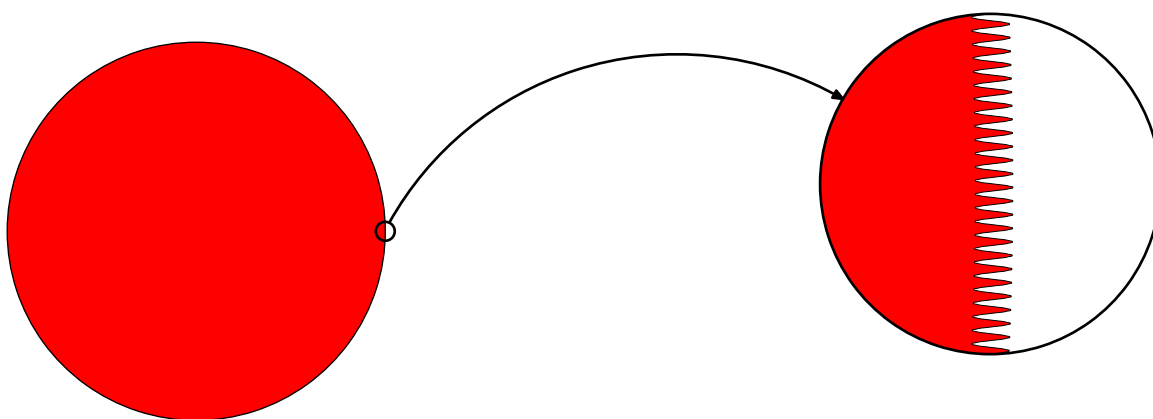
Ale dla oszacowania długości krzywej rysunek musi być nieskończenie dokładny.

Jeśli twierdzisz, że większy obwód ma figura zielona, Twoje twierdzenie jest co najmniej bezpodstawne, a w tym wypadku nawet fałszywe...

Patrząc na brzegi obu figur pod mikroskopem (rys. 35 i 36), można dostrzec, że brzeg figury zielonej jest taki, jakbyśmy oczekiwali, natomiast brzeg figury czerwonej jest mocno pozawijany, co ogromnie wpływa na długość obwodu tej figury. Ale wpływu na pole istotnego nie ma.



rys. 35



rys. 36

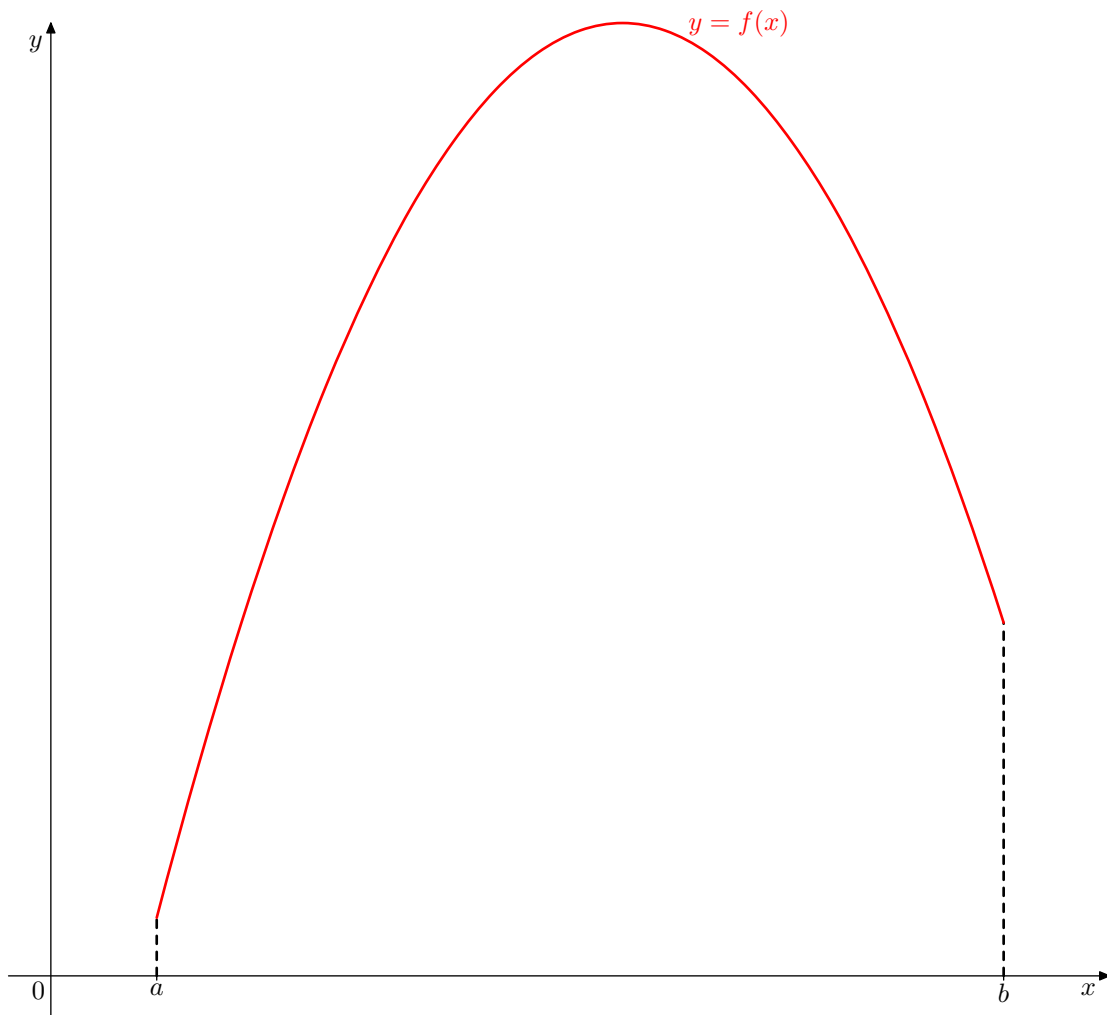
Podobne zjawisko wystąpiłoby, gdybyśmy patrzyli na mapę Polski i zastanawiali się nad powierzchnią kraju (to akurat na mapie "widać") oraz nad długością linii brzegowej – każdy, kto szedł brzegiem morza wie, że małe półwyspy i zatoczki uformowane przez morskie fale wydatnie wydłużają długość linii brzegowej, ale nie pokaże ich żadna mapa.

Te przykłady pokazują jak złudne jest naiwne przybliżanie jednej krzywej inną krzywą, gdy nie oczekujemy niczego więcej niż tylko tego, aby odpowiednie punkty obu krzywych były blisko siebie. Na długość ma ogromny wpływ pomarszczenie krzywej w mikro-skali. Eeeh... mniejsza o samą długość, to może wręcz uniemożliwić sensowne zdefiniowanie tejże długości.

Dlatego od przybliżenia jednej krzywej drugą krzywą będziemy oczekiwali nie tylko bliskości odpowiednich punktów, ale także dokładnego naśladowania kierunku. A żeby mówić o kierunku, trzeba mówić o stycznej, a styczna pachnie pochodną, a więc różniczkowalnością.

Zajmiemy się więc krzywymi, które są wykresami funkcji różniczkowalnych, najlepiej mających ciągłą pochodną.

Zagadnienie brzmi więc następująco: Dana jest funkcja<sup>102</sup>  $f \in C^1[a, b]$ . Obliczyć długość krzywej będącej wykresem funkcji  $f$  (rysunek 37).



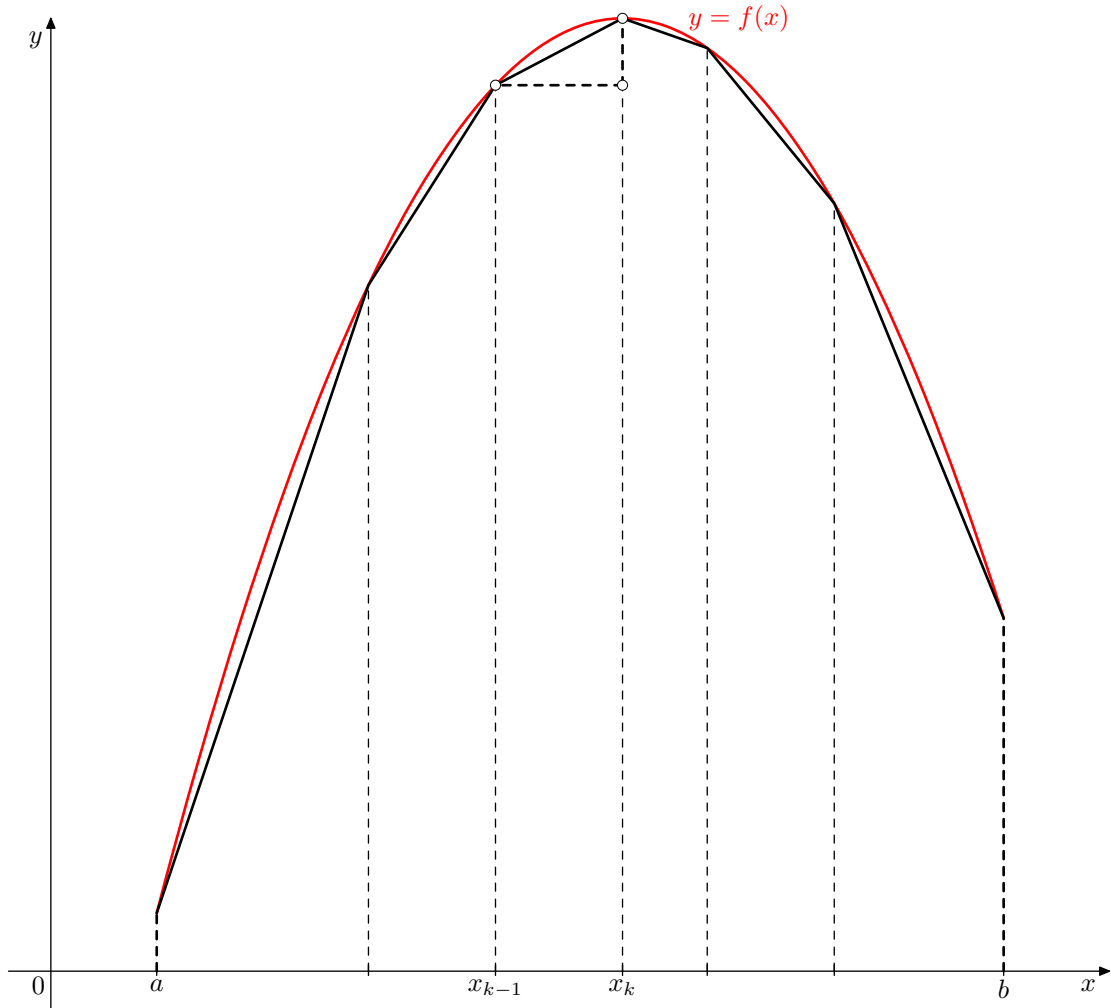
rys. 37

---

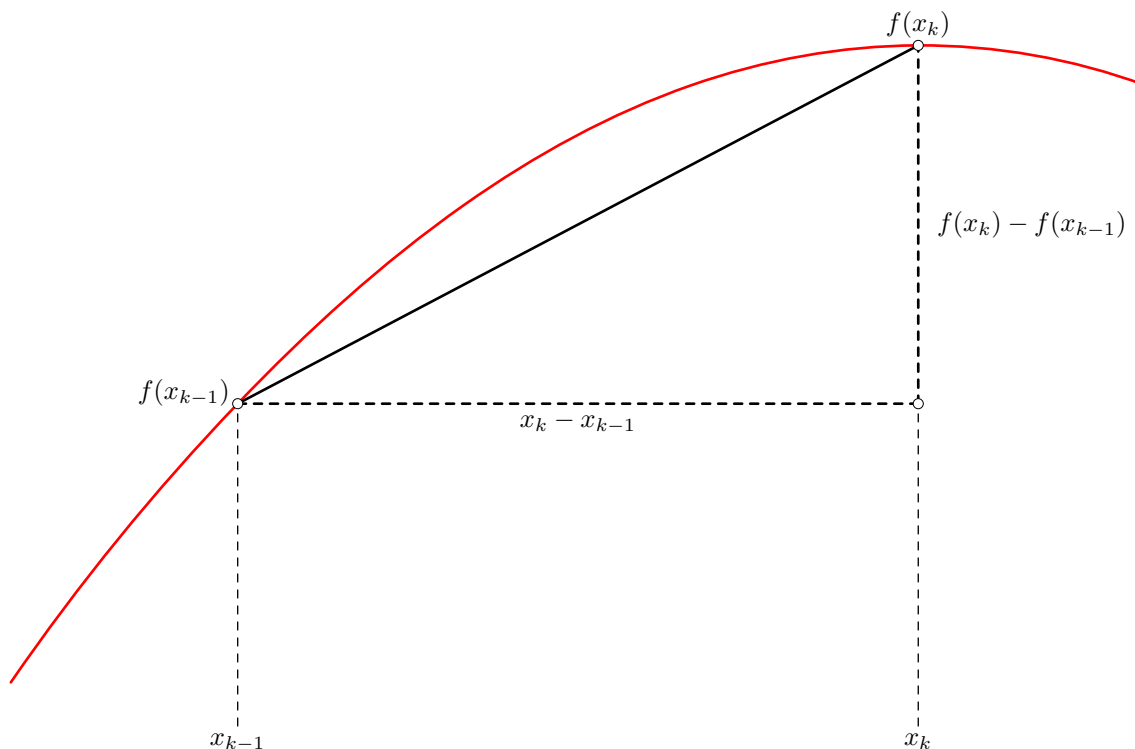
<sup>102</sup>Przypominam, że funkcja klasy  $C^1[a, b]$  to funkcja różniczkowalna na przedziale  $[a, b]$  – z pochodnymi jednostronnymi na końcach, gdzie dodatkowo zakładamy, że pochodna funkcji  $f$  jest ciągła i ma w punktach  $a, b$  granice równe odpowiednim pochodnym jednostronnym.

Dla podziału  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  przedziału  $[a, b]$  rozważmy łamaną wpisaną w wykres funkcji  $f$ , czyli łamaną o wierzchołkach  $(x_k, f(x_k))$ , przedstawioną na rysunku 38.

Jej długość jest sumą długości odcinków, które się na nią składają. Obliczmy długość  $k$ -tego odcinka, który w powiększeniu jest przedstawiony na rysunku 39.



rys. 38



rys. 39

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że długość  $k$ -tego odcinka łamanej jest równa

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} &= (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} = \\ &= (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_k))^2}, \end{aligned}$$

gdzie  $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$  istnieje na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

To prowadzi do następującego wzoru na długość łamanej:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_k))^2}.$$

Powyższe rachunki przeprowadzone są dla pojedynczego podziału przedziału  $[a, b]$ , który to podział oznaczyliśmy przez  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Zamiast tego przyjmijmy, że dany mamy ciąg podziałów o średnicy dążącej do zera, niech  $n$ -tym podziałem ciągu będzie  $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n})$ .

Wówczas otrzymamy nie pojedynczą łamaną, ale ciąg łamanych, których długości tworzą ciąg liczbowy o  $n$ -tym wyrazie równym:

$$\sum_{k=1}^n (x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(y_{n,k}))^2},$$

gdzie  $y_{n,k} \in (x_{n,k-1}, x_{n,k})$ .

W tym ciągu liczbowym możemy rozpoznać sumy całkowe Riemanna dążące do całki

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

która to całka wyraża szukaną długość wykresu funkcji  $f$ .



## Wzór do zapamiętania:

Długość krzywej będącej wykresem funkcji różniczkowalnej  $f$  na przedziale  $[a, b]$  jest równa

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Niestety, kwadrat pochodnej pod pierwiastkiem w funkcji podcałkowej powoduje, że nawet dla stosunkowo prostych funkcji obliczenie długości ich wykresu jest trudne lub wręcz niemożliwe.

## Środki ciężkości figur płaskich.

Czym jest środek ciężkości<sup>103</sup> figury, najłatwiej wyobrazić sobie na przykładzie figury płaskiej. Jeżeli figurą tą jest pewien obszar na płaszczyźnie, to wycinając ten obszar z jednorodnego<sup>104</sup> sztywnego kartonu albo blachy, możemy próbować balansować wycięty obszar na czubku zaostrego ołówka. Środkiem ciężkości jest punkt, który umieszczony na ostrzu ołówka da nam chwilowe poczucie równowagi<sup>105</sup>. Jeśli ostrze ołówka będzie trochę stępione, to może nam się nawet udać uzyskanie równowagi trwałej.

Analogicznie będziemy rozumieli środek ciężkości krzywej płaskiej. Krzywą taką trzeba wygiąć z cienkiego, ale masywnego jednorodnego drutu, a następnie położyć na nieważkiej<sup>106</sup> sztywnej powierzchni płaskiej (najlepiej do niej przykleić, żeby się nie ślizgała). Wówczas drut wraz z nieważką powierzchnią będą tworzyć bryłę<sup>107</sup> sztywną, w której za sztywność i możliwość podpierania w dowolnym punkcie odpowiada nieważka powierzchnia, a za rozmieszczenie masy odpowiada drut. Tak samo moglibyśmy próbować balansować tę bryłę na czubku ołówka – uda się to tylko wtedy, gdy podeprzemy ją w środku ciężkości krzywej.

Podobnie wygląda interpretacja środka ciężkości układu mas punktowych. Trzeba je przykleić do nieważkiej sztywnej powierzchni płaskiej i tak otrzymany twór balansować na czubku ołówka.

<sup>103</sup>W naszych zastosowaniach można również mówić "środek masy". W zasadzie właśnie o środek masy nam chodzi, ale w geometrii zwykło się mówić o środku ciężkości figury. Z punktu widzenia fizyki oba pojęcia są tożsame w jednorodnym polu grawitacyjnym.

<sup>104</sup>Oczywiście materiał mógłby być niejednorodny, wtedy trzeba byłoby uwzględnić zmieniającą się gęstość powierzchniową (ewentualnie liniową w przypadku krzywej). Nie wnosi to jednak żadnych nowych zjawisk, a jedynie komplikuje otrzymane wzory – aż taka ogólność nie jest nam tu potrzebna.

<sup>105</sup>Podparcie obszaru w jakimkolwiek innym punkcie nie uda się nawet na moment.

<sup>106</sup>W praktyce: bardzo lekkiej.

<sup>107</sup>Słowo "bryła" kojarzy się z tworem trójwymiarowym, podczas gdy tu mamy twór płaski. Jednak patrząc na ten model (powierzchnia + drut) w świecie trójwymiarowym widzimy twór trójwymiarowy, o zaniedbywalnie małej grubości.

W szkolnej matematyce "środek ciężkości" kojarzy się przede wszystkim ze środkiem ciężkości trójkąta, a ten definiowany jest jako punkt przecięcia środkowych. I tyle. Ani słowa o masach, czy jakiegokolwiek fizyce. No tak, ale przecież ta nazwa nie powstała w oderwaniu od fizycznego środka ciężkości. Tylko czymże jest środek ciężkości trójkąta?

Można pomyśleć o trzech możliwościach:

- Środek ciężkości powierzchni trójkąta, czyli trójkąta wyciętego z kartonu.
- Środek ciężkości obwodu trójkąta, czyli obwodu trójkąta wygiętego z drutu.
- Środek ciężkości wierzchołków trójkąta, czyli trzech jednakowych mas punktowych umieszczonych w wierzchołkach.

**Zastanów się nad odpowiedzią na następujące pytania:**

**Czy w ogólnym trójkącie powyższe trzy środki ciężkości leżą w jednym punkcie, czy też mogą to być różne punkty?**

**Jeśli różne, to który z nich jest środkiem ciężkości znanym z geometrii trójkąta?**

Podstawowa własność środka ciężkości układu mas, nieważne czy punktowych, czy o gęstości liniowej (drut), czy powierzchniowej (blacha) czy nawet objętościowej (bryła trójwymiarowa), jest następująca:

Możemy wybrać dowolną część masy wchodzącej w skład układu mas, a następnie zsunąć te masy do ich środka ciężkości. Wtedy środek ciężkości całego układu mas nie ulegnie zmianie.

Wracając do trójkąta: Środek ciężkości odcinka (w domyśle: wykonanego z jednorodnego materiału) leży w geometrycznym środku odcinka, a masa tegoż odcinka jest wprost proporcjonalna do jego długości. Tak więc środek ciężkości obwodu trójkąta (w domyśle: wygiętego z jednorodnego drutu) jest taki, jak gdyby w środkach boków trójkąta umieścić masy punktowe proporcjonalne do długości tychże boków.

Rozważmy trójkąt równoramienny o bardzo krótkiej podstawie i bardzo długich ramionach. Jego geometryczny środek ciężkości leży w  $1/3$  wysokości. Jednak obwód tego trójkąta składa się z dwóch prawie pokrywających się odcinków (ramion) i podstawy zaniedbywalnej pod względem masy. Zatem środek ciężkości obwodu leży prawie w połowie wysokości trójkąta. Skoro oba środki ciężkości<sup>108</sup> leżą w różnych odległościach od podstawy trójkąta, to znaczy, że się nie pokrywają. Tak więc środek ciężkości obwodu trójkąta to na ogół nie to samo, co geometryczny środek ciężkości (czyli punkt przecięcia środkowych).

Okazuje się jednak, że środek ciężkości wierzchołków trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta wyciętego z kartonu i jest to geometryczny środek trójkąta<sup>109</sup>.

Nie będę wchodził w szczegóły, dlaczego tak jest, gdyż nie jest to główny temat wykładu.

<sup>108</sup>Geometryczny środek ciężkości trójkąta oraz środek ciężkości obwodu trójkąta.

<sup>109</sup>Analogicznie jest w przestrzeni trójwymiarowej. Geometryczny środek ciężkości czworościanu to zarówno środek ciężkości pełnej bryły czworościennej jak i środek ciężkości jednakowych mas umieszczonych w wierzchołkach czworościanu. Czym innym jest środek ciężkości powierzchni czworościanu (ściany z blachy), a jeszcze czym innym środek ciężkości krawędzi (szkielet czworościanu wykonany z drutu).

Zamiast tego zajmiemy się obliczaniem położenia środka ciężkości. Zaczniemy od przypadku mas punktowych. Niech dla  $k = 1, 2, \dots, n$  punkt materialny o masie  $m_k$  będzie umieszczony w punkcie  $(x_k, y_k)$ . Wówczas środek ciężkości tak rozmieszczonych  $n$  mas punktowych znajduje się w punkcie

$$\left( \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \right).$$

Zauważmy, że w mianownikach jest suma wszystkich mas, czyli łączna masa całego układu  $n$  mas. W licznikach są natomiast prawie takie same sumy, z tym że poszczególne składniki są przemnożone przez współrzędne odpowiadające położeniu poszczególnych mas.

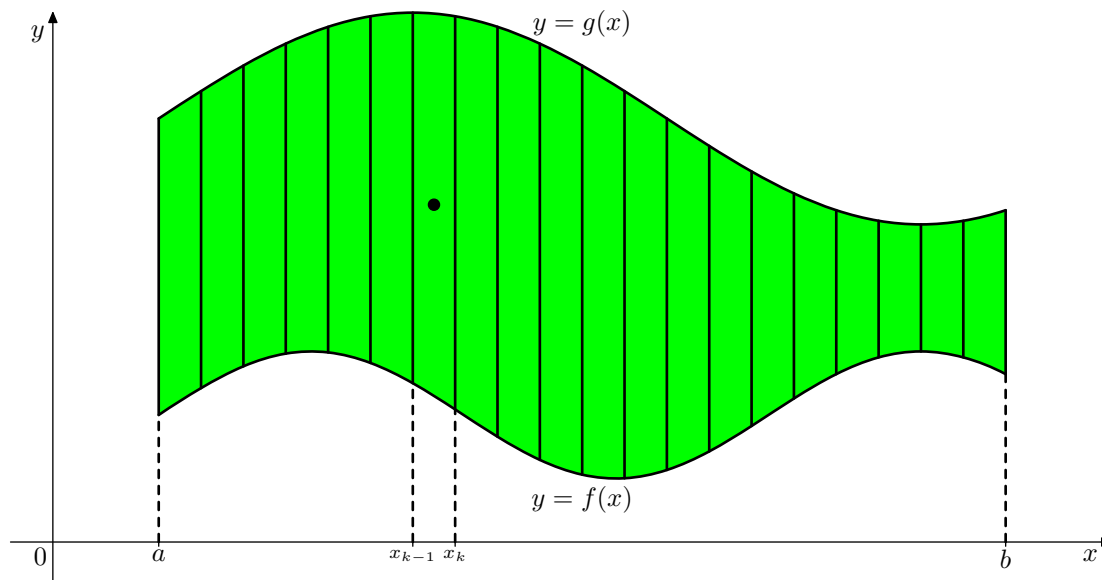
Czasami mówi się, że współrzędne środka masy są średnimi ważonymi odpowiednich współrzędnych punktów materialnych wchodzących w skład układu mas.

### Środek ciężkości obszaru na płaszczyźnie.

Bez wchodzenia w nadmierne formalizmy<sup>110</sup>, wyprowadzę wzór na środek ciężkości obszaru

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

gdzie funkcje ciągłe  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają nierówność  $f(x) \leq g(x)$  dla każdego  $x \in [a, b]$ .



rys. 40

<sup>110</sup>A dokładniej: w konwencji, którą można spotkać w fizyce.

Podzielmy przedział  $[a, b]$  na małe przedziałiki (rys. 40). To prowadzi do podziału rozważanej figury na paski o szerokości<sup>111</sup>  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ . Pole takiego paska jest iloczynem jego szerokości  $\Delta x_k$  przez jego długość, która jest z grubsza równa  $g(x_k) - f(x_k)$ .

Wobec tego pole całej figury jest w przybliżeniu równe<sup>112</sup>

$$\sum_k \left( g(x_k) - f(x_k) \right) \cdot \Delta x_k.$$

W rozważaniach fizycznych przejście do granicy z sumami całkowitymi Riemanna często odbywa się przy pomocy formułki w stylu: jak paski staną się nieskończenie wąskie, to otrzymamy dokładną wartość pola, a suma przekształci się w całkę<sup>113</sup>

$$\int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Na razie otrzymaliśmy znany nam już wzór na pole figury<sup>114</sup>.

Środek ciężkości  $k$ -tego paska<sup>115</sup> leży z grubsza w połowie jego długości<sup>116</sup>, w przybliżeniu w punkcie

$$\left( \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \right),$$

co przy bardzo wąskim pasku jest w przybliżeniu równe mniej dokładnemu, ale prostszemu punktowi<sup>117</sup>

$$(x_k, y_k) = \left( x_k, \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \right).$$

Biorąc pod uwagę, że masa<sup>118</sup> tegoż paska jest z grubsza równa  $m_k = (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k$ , otrzymujemy przybliżone współrzędne środka ciężkości obszaru jako

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sum_k x_k m_k}{\sum_k m_k}, \frac{\sum_k y_k m_k}{\sum_k m_k} \right) = \\ & = \left( \frac{\sum_k x_k \cdot (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}{\sum_k (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}, \frac{\sum_k \frac{f(x_k) + g(x_k)}{2} \cdot (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k}{\sum_k (g(x_k) - f(x_k)) \cdot \Delta x_k} \right), \end{aligned}$$

<sup>111</sup>Literka  $\Delta$  w fizyce odnosi się do przyrostu następującej po niej wielkości. Oznaczenie  $\Delta x_k$  należy rozumieć nie jako przyrost  $x_k$  (czyli  $\Delta(x_k)$ ), co specjalnie nie ma sensu, ale jako  $k$ -ty przyrost  $x$ 'a, czyli  $(\Delta x)_k$ .

<sup>112</sup>W tej konwencji pod znakiem sumy piszemy tylko indeks numerujący **wszystkie** paski, nie precyzując wyraźnie zakresu zmienności tego indeksu.

<sup>113</sup>Przy tym  $\Delta x_k$  (a w niektórych wersjach  $\Delta x$ ) zamienia się w  $dx$ .

<sup>114</sup>Nie dbam o zmianę roli  $f$  i  $g$  w stosunku do oznaczeń z wczorajszego wykładu.

<sup>115</sup>Duża czarna kropka na rysunku 40.

<sup>116</sup>I z grubsza w połowie szerokości.

<sup>117</sup>Drugą współrzędną dla krótkości oznaczamy przez  $y_k$ .

<sup>118</sup>Czyli pole. Dla figury wyciętej z jednorodnego materiału masa jest proporcjonalna do pola.

co przy nieskończeniu wąskich paskach daje dokładne położenie środka ciężkości obszaru wyrażone przy pomocy całek:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) \, dx}{\int_a^b g(x) - f(x) \, dx}, \frac{\int_a^b \frac{f(x)+g(x)}{2} \cdot (g(x) - f(x)) \, dx}{\int_a^b g(x) - f(x) \, dx} \right) = \\ & = \left( \frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) \, dx}{\int_a^b g(x) - f(x) \, dx}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 \, dx}{\int_a^b g(x) - f(x) \, dx} \right). \end{aligned}$$

### Środek ciężkości krzywej płaskiej.

Teraz zajmiemy się środkiem ciężkości krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\},$$

gdzie funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna i ma ciągłą pochodną<sup>119</sup>.

Podzielmy przedział  $[a, b]$  na małe przedziały i przyjrzyjmy się  $k$ -temu przedziałowi długości  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  (rys. 41).

Odpowiada mu cięciwa<sup>120</sup> długości  $\sqrt{1 + (f'(c))^2} \cdot \Delta x_k$ , gdzie  $c$  należące do przedziału istnieje na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej<sup>121</sup>. Jeśli przedział jest bardzo mały, to zamiast  $c$  można wziąć inny jego punkt, popełnimy wtedy niewielki błąd. Także środek ciężkości cięciwy, leżący w jej połowie, może być z małą szkodą dla dokładności wycień przesunięty do jednego jej końca. Możemy więc dla celu przybliżonych rachunków przyjąć, że  $k$ -ta cięciwa ma masę (czyli długość)

$$m_k = \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k,$$

która to masa jest skupiona w punkcie

$$(x_k, y_k) = (x_k, f(x_k)).$$

Wówczas środek ciężkości krzywej leży w przybliżeniu w punkcie

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sum_k x_k m_k}{\sum_k m_k}, \frac{\sum_k y_k m_k}{\sum_k m_k} \right) = \\ & = \left( \frac{\sum_k x_k \cdot \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}{\sum_k \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}, \frac{\sum_k f(x_k) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k}{\sum_k \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \cdot \Delta x_k} \right), \end{aligned}$$

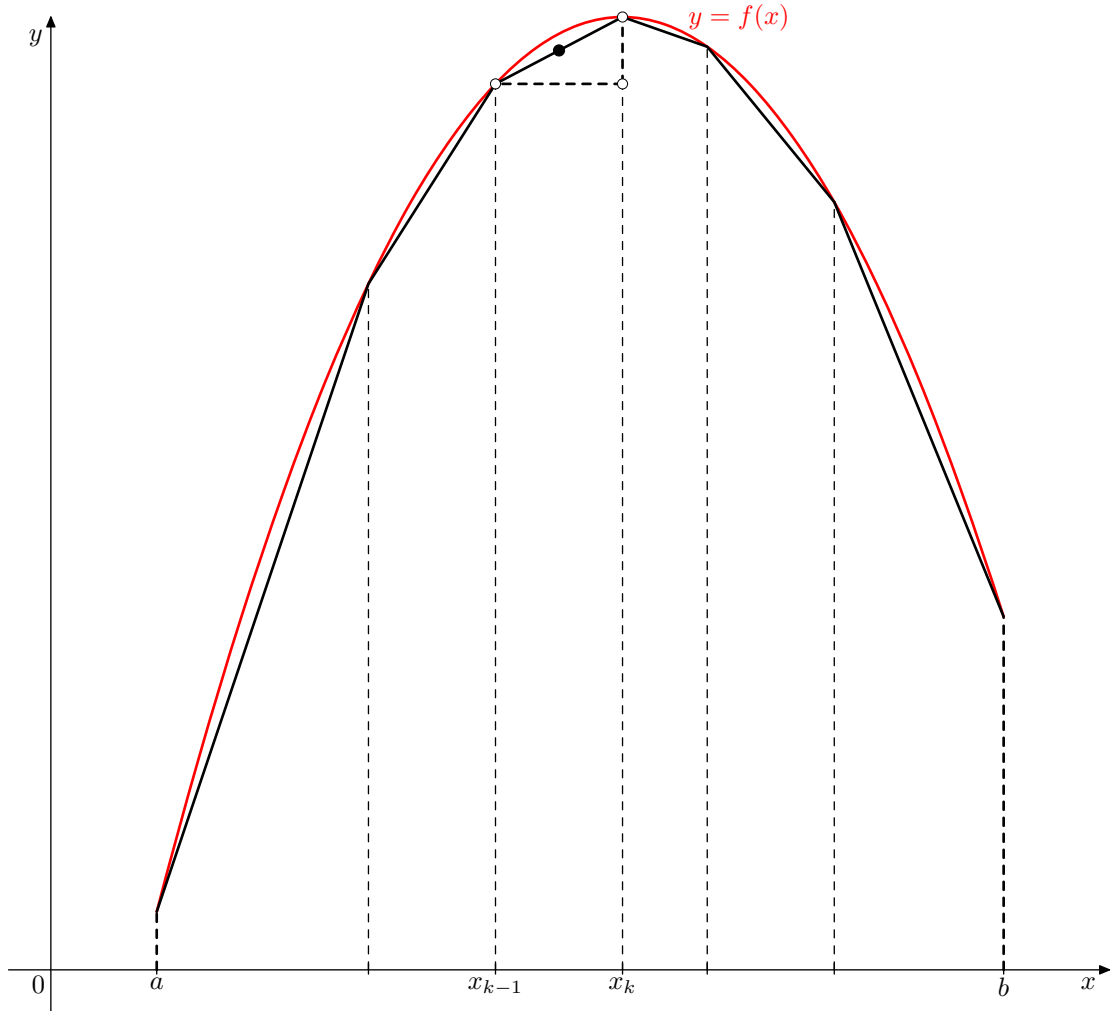
<sup>119</sup>Dokładniej: zakładamy, że  $f \in C^1[a, b]$ , czyli  $f$  jest różniczkowalna na przedziale  $[a, b]$  – z pochodnymi jednostronnymi na końcach, gdzie dodatkowo zakładamy, że pochodna funkcji  $f$  jest ciągła i ma w punktach  $a, b$  granice równe odpowiednim pochodnym jednostronnym.

<sup>120</sup>Wiem, wiem, jestem niekonsekwentny – jak jest przedziałik, to powinna mu odpowiadać cięciwka.

<sup>121</sup>Zobacz korona09, strona 86.

co przy nieskończeniu małych przedziałkach daje dokładne położenie środka ciężkości krzywej wyrażone przy pomocy całek:

$$\left( \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \right).$$



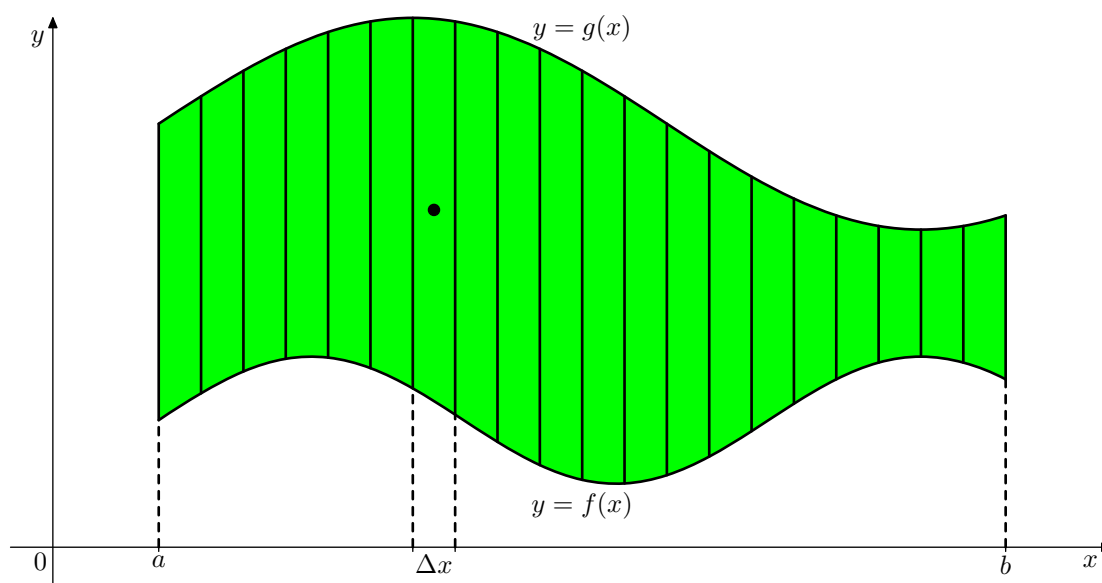
rys. 41

## Obejrzyj w internecie wykład doc. Górniaka z PWr:

### Odcinek 79: Obliczanie objętości brył obrotowych

A teraz przedstawię wyprowadzenie wzorów związanych z przestrzennymi figurami obrotowymi. Nie stawiam sobie za cel matematycznej precyzji, a zależy mi jedynie na pokazaniu dlaczego wzory są takie, a nie inne. Wykład będzie utrzymany w konwencji rozumowań stosowanych w fizyce.

### Bryły obrotowe.



rys. 42

Podzielmy obszar przedstawiony na rysunku 42 na wąskie paski<sup>122</sup>.

Obracając wokół osi  $OX$  pasek<sup>123</sup> wyróżniony na rysunku otrzymamy gruby pierścień kołowy o promieniu wewnętrznym  $f(x)$ , promieniu zewnętrznym  $g(x)$  oraz grubości  $\Delta x$ . Zatem pasek ten przy obrocie omiata objętość równą  $\pi \cdot (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x$ . Objętość całej bryły obrotowej możemy więc przybliżyć przez sumę po wszystkich paskach:

$$\pi \cdot \sum (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x,$$

co przy nieskończeniu cienkich paskach cudownie przemienia się w całkę

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx.$$

Jest to wzór na objętość bryły powstałej przez obrót obszaru wokół osi  $OX$ .

<sup>122</sup>Nie będę ich numerować, a znak sumy odnosić się będzie do sumowania po wszystkich paskach podziału, ile ich tam jest.

<sup>123</sup>Dla celów rachunkowych przyjmujemy, że pasek ten jest (prawie) prostokątem.

Środek ciężkości rozważanej bryły obrotowej leży oczywiście na osi  $OX$ , a jego współrzędna  $x$ -owa jest w przybliżeniu równa

$$\frac{\pi \cdot \sum \mathbf{x} \cdot (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x}{\pi \cdot \sum (g^2(x) - f^2(x)) \cdot \Delta x},$$

co po przejściu granicznym daje dokładny wzór:

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{\int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx}.$$

Z kolei obrót tegoż paska wokół osi  $OY$  prowadzi do grubej powierzchni walcowej o promieniu  $x$ , tworzącej<sup>124</sup>  $g(x) - f(x)$  oraz grubości  $\Delta x$ , co daje objętość

$$2\pi \cdot x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na objętość bryły obrotowej

$$2\pi \cdot \sum x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx = V_{OY}.$$

Współrzędna  $y$ -kowa środka ciężkości rozważanego paska jest równa

$$\frac{g(x) + f(x)}{2},$$

co prowadzi do współrzędnej  $y$ -kowej środka ciężkości całej bryły obrotowej:

$$\frac{2\pi \cdot \sum \frac{g(x)+f(x)}{2} \cdot x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum x \cdot (g(x) - f(x)) \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{2 \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx} = y_s.$$

---

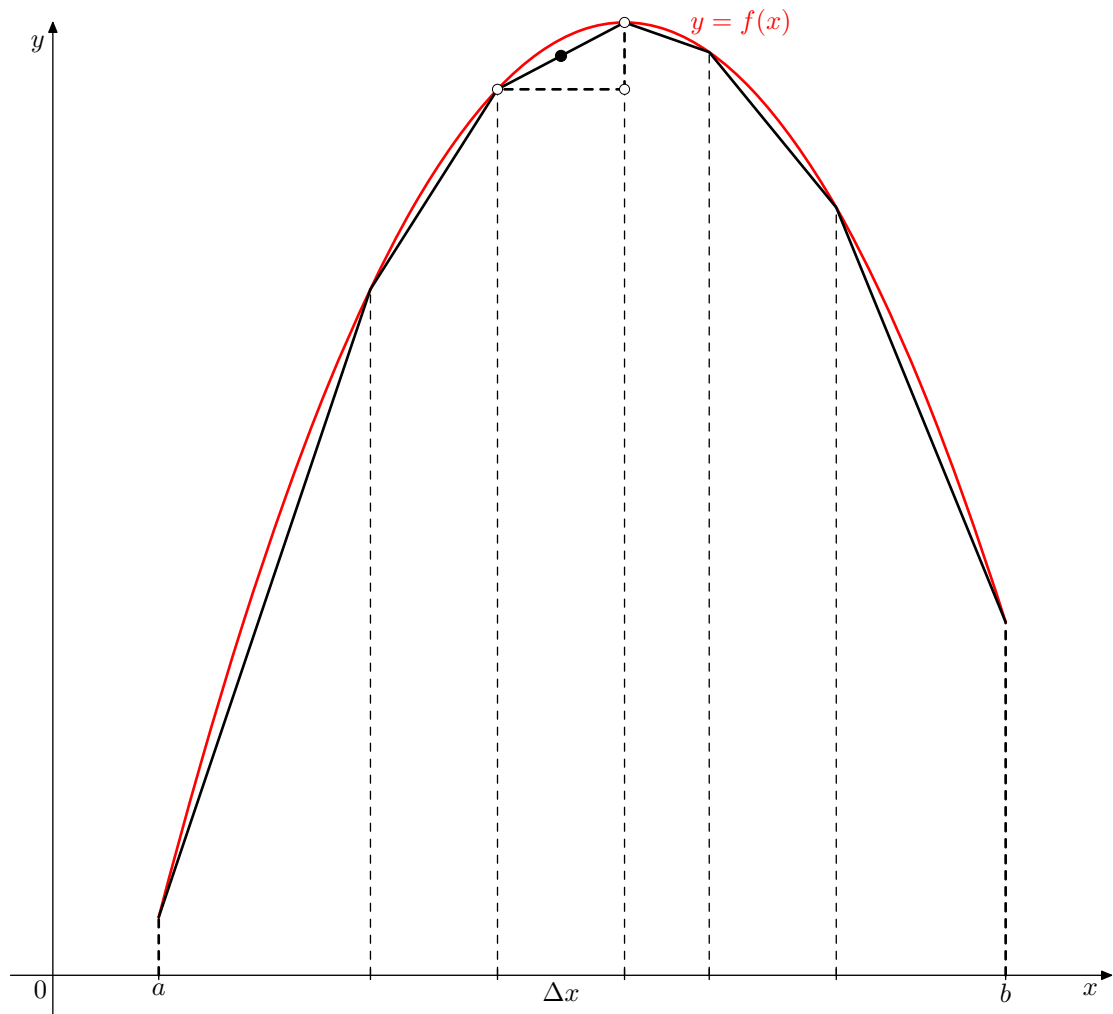
<sup>124</sup>Chodzi o długość tworzącej walca.



## Powierzchnie obrotowe.

Aby móc obliczać pole powierzchni powstałej przez obrót wykresu funkcji, założymy, że funkcja ta jest gładka, czyli w tym wypadku różniczkowalna i ma ciągłą pochodną.

Trzeba sobie bowiem wyobrazić, że objętość jabłka zależy od jego rozmiaru, a nie od tego, czy jest ono świeże, czy zwiędnięte i ma pomarszczoną skórkę. Za to gładkość skórki ma decydujący wpływ na powierzchnię tejże skórki, a za gładkość odpowiada pochodna.



rys. 43

Przybliżmy wykres funkcji łamaną (rys. 43). Rozważany segment łamanej ma w przybliżeniu długość

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \Delta x .$$

Przy obrocie wokół osi  $OX$  rozważany odcinek zakresła fragment powierzchni stożkowej o tworzącej długości  $\sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x$  i promieniu  $f(x)$ , a więc polu powierzchni

$$2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na pole całej powierzchni obrotowej:

$$2\pi \cdot \sum f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = P_{OX}.$$

Współrzędna  $x$ -owa środka ciężkości odcinka łamanej jest równa  $x$ , skąd otrzymujemy wzór na współrzędną  $x$ -ową środka ciężkości całej powierzchni obrotowej:

$$\frac{2\pi \cdot \sum \mathbf{x} \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx}{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx} = x_s.$$

Przy obrocie wokół osi  $OY$  rozważany odcinek zakresła fragment powierzchni stożkowej o tworzącej długości  $\sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x$  i promieniu  $x$ , a więc polu powierzchni

$$2\pi \cdot x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x.$$

To prowadzi do wzoru na pole całej powierzchni obrotowej:

$$2\pi \cdot \sum x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x \rightarrow 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = P_{OY}.$$

Współrzędna  $y$ -kowa środka ciężkości odcinka łamanej jest równa  $f(x)$ , skąd otrzymujemy wzór na współrzędną  $y$ -kową środka ciężkości całej powierzchni obrotowej:

$$\frac{2\pi \cdot \sum \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x}{2\pi \cdot \sum x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot \Delta x} \rightarrow \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx}{\int_a^b x \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx} = y_s.$$

## Obejrzyj w internecie wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **81**: Obliczanie pól powierzchni brył obrotowych.

## Wzory na długości, pola, objętości i środki ciężkości

Musisz znać wzory (\*). Pozostałe wzory, czyli (???), musisz umieć rozpoznać<sup>125</sup> w poniższym spisie i umieć je zastosować.

$$P = \int_a^b g(x) - f(x) dx \quad (*)$$

$$\left( \frac{\int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx}{\int_a^b g(x) - f(x) dx} \right) \quad (???)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (*)$$

$$\left( \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \right) \quad (???)$$

$$V_{OX} = \pi \cdot \int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx \quad x_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{\int_a^b g^2(x) - f^2(x) dx} \quad (???)$$

$$V_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx \quad y_s = \frac{\int_a^b x \cdot (g^2(x) - f^2(x)) dx}{2 \cdot \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx} \quad (???)$$

$$P_{OX} = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \quad (???)$$

$$P_{OY} = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad y_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \quad (???)$$

<sup>125</sup>Czyli wiedzieć który czego dotyczy i rozumieć, jakich założeń wymaga. Konieczne założenia mogą dotyczyć ciągłości/różniczkowalności oraz nieujemności funkcji, a także nieujemności granic całkowania.

**Przykład 54:**

Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $0 \leq a < b$ , pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wokół osi  $OY$  jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Wyznaczyć pole powierzchni

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z \leq 1\}.$$

*Rozwiązanie:*

Ponieważ dana w zadaniu paraboloida obrotowa powstaje przez obrót wokół osi  $OZ$  łuku paraboli o równaniu  $z = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , umieszczonego w płaszczyźnie  $XZ$ , przyjmijmy w podanym wzorze  $f(x) = x^2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ .

Biorąc pod uwagę, że  $f'(x) = 2x$  oraz wykonując po drodze podstawienie  $t = 1 + 4x^2$ , czyli formalnie  $dt = 8x dx$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^5 \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^5 = \frac{\pi}{6} \cdot t^{3/2} \Big|_{t=1}^5 = \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot 5^{3/2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Pole danej w zadaniu powierzchni obrotowej jest równe  $\frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1)$ .