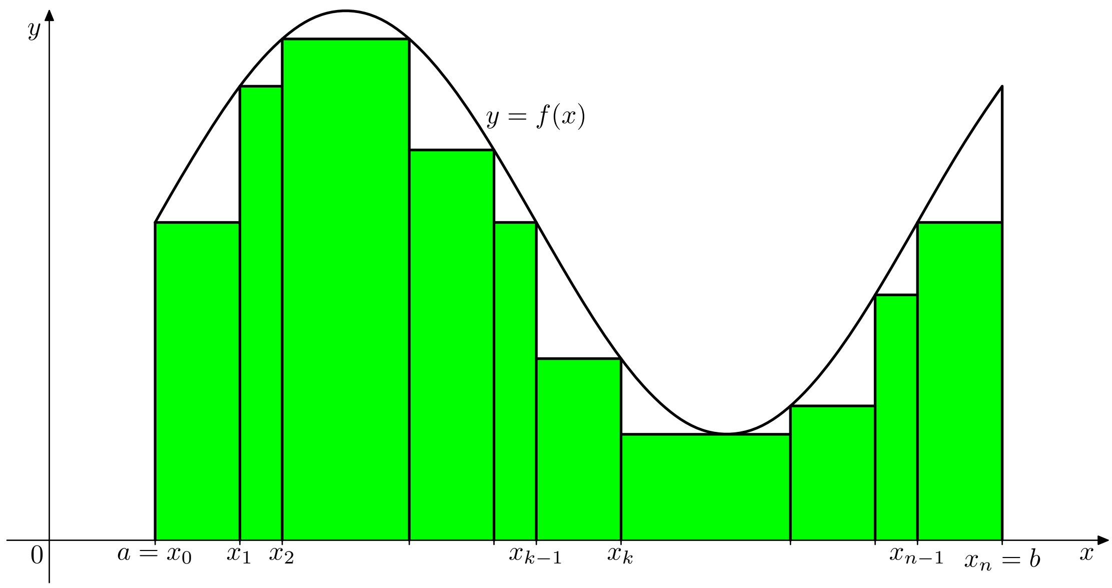
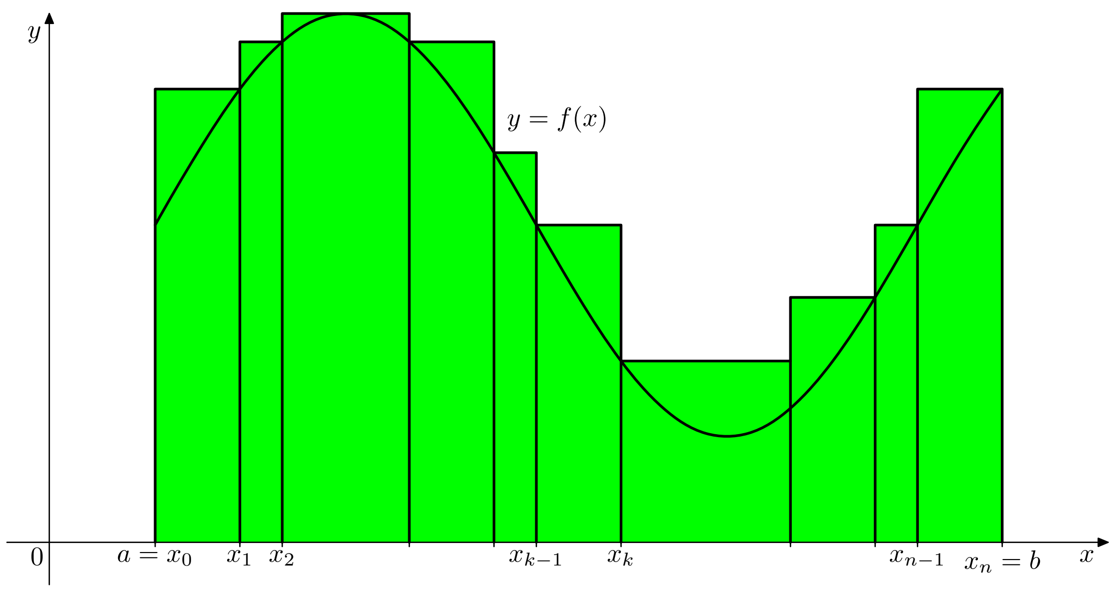
Całka Riemanna

Podziałem przedziału $[a,b]$ nazywamy każdy skończony ciąg $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, gdzie $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

Z takim podziałem wiążemy figury złożone z prostokątów zbudowanych na odcinkach podziału. Z jednej strony (rys. 19) budujemy największą figurę, króra jest zawarta w obszarze pod wykresem funkcji f, a z drugiej (rys. 20) najmniejszą figurę, która ten obszar zawiera.



rys. 19



rys. 20

Biorąc pod uwagę, że k-tym przedzialikiem podziału jest przedział $[x_{k-1}, x_k]$, figury zamalowane na zielono na rysunkach 19 i 20 mają pola równe odpowiednio

$$\sum_{k=1}^{n}\left((x_k-x_{k-1})\cdot \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\right) \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{k=1}^{n}\left((x_k-x_{k-1})\cdot \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\right).$$

Jeżeli $\mathcal{P}$ jest zbiorem wszystkich podziałów $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ przedziału $[a, b]$, to funkcja ograniczona $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ jest (z definicji) całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n}\left((x_k-x_{k-1})\cdot \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\right) =$$

$$= \inf_{(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n}\left((x_k-x_{k-1})\cdot \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\right).$$

Całkowalne są wszystkie funkcje ciągłe, ale niektóre nieciągłe też (na razie tego nie precyzujemy).

Jeśli funkcja f jest całkowalna, to całka oznaczona $\int_a^b f(x)dx$ jest granicą ciągu sum Riemanna odpowiadających ciągowi podziałów przedziału $[a, b]$ o średnicy[95] dążacej do zera. W sumie Riemanna z każdego przedzialika podziału dowolnie wybieramy punkt, z którego czerpiemy wartość funkcji f. Jeżeli $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ jest podziałem przedziału $[a, b]$, a $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$, to odpowiadająca temu podziałowi i temu wyborowi punktów y_k suma Riemanna jest równa

$$\sum_{k=1}^{n}\left((x_k-x_{k-1})\cdot f(y_k)\right).$$

Powyższy fakt zapiszę różnymi wzorami opierającymi się o różny kompromis pomiędzy ogólnością i prostotą.

Wersja 1 (najogólniejsza):

Założenia: Funkcja $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a, b]$. W tym ciągu n-tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,m_n-1}, x_{n,m_n})$, który jest podziałem na m_n przedzialików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k-ty punkt n-tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant m_n} (x_{n,k}-x_{n,k-1}) = 0.$$

I do tego jeszcze z każdego przedzialiku każdego podziału wybieramy dowolnie jeden punkt, a dokładniej z przedzialiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n}\left((x_{n,k}-x_{n,k-1})\cdot f(y_{n,k})\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

[95] Średnica podziału to długość najdłuższego przedzialika tego podziału: $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (x_k-x_{k-1})$.

Wersja 2 (trochę mniej ogólna: dowolne podziały, y-ki w prawych końcach):

Założenia: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a,b]$. W tym ciągu n-tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2},\ldots, x_{n,m_n-1}, x_{n,m_n})$, który jest podziałem na m_n przedzialików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k-ty punkt n-tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}(x_{n,k}-x_{n,k-1})=0\,.$$

Jako punkt z przedzialiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k}=x_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\Big((x_{n,k}-x_{n,k-1})\cdot f(x_{n,k})\Big)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

**Wersja 3 (jeszcze mniej ogólna: n-ty podział na n części,
y-ki w prawych końcach):**

Założenia: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Do tego dany jest ciąg podziałów przedziału $[a,b]$. W tym ciągu n-tym wyrazem jest podział $(x_{n,0}, x_{n,1}, x_{n,2},\ldots, x_{n,n-1}, x_{n,n})$, który jest podziałem na n przedzialików. I tak $x_{n,k}$ oznacza k-ty punkt n-tego podziału. Zakładamy, że średnice podziałów dążą do 0:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_{n,k}-x_{n,k-1})=0\,.$$

Jako punkt z przedzialiku $[x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ wybieramy punkt $y_{n,k}=x_{n,k}$.

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big((x_{n,k}-x_{n,k-1})\cdot f(x_{n,k})\Big)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawymi końcami):

Założenia: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Przyjmujemy, że n-ty podział przedziału $[a,b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k}=a+k\cdot\frac{b-a}{n}$$

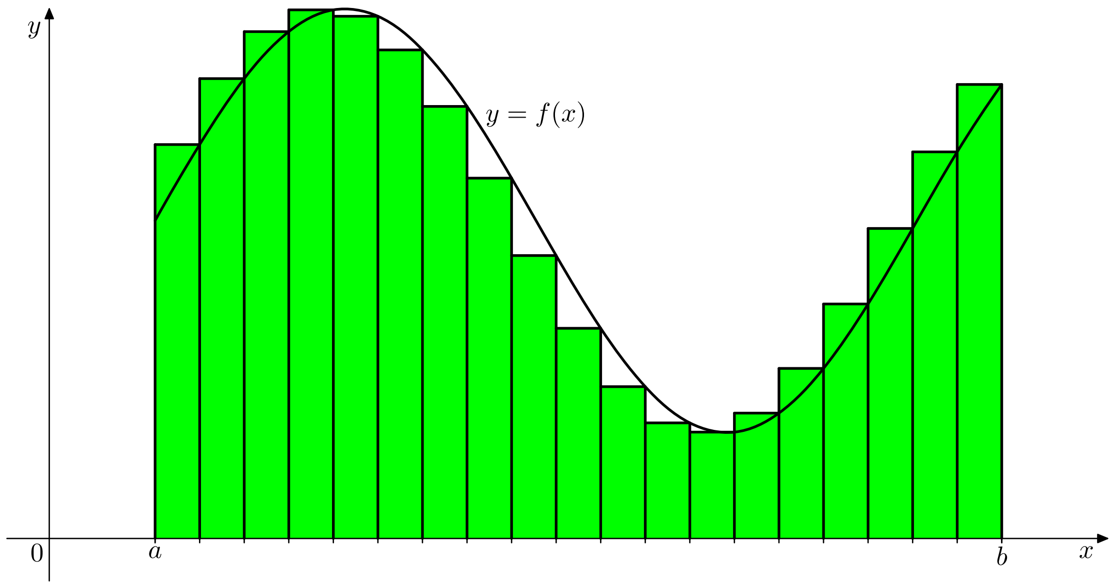
oraz że są one jednocześnie y-kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f:

$$y_{n,k}=x_{n,k}=a+k\cdot\frac{b-a}{n}\,.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Suma Riemanna odpowiadająca opisanemu wyżej podziałowi przedziału na równe części przedstawiona jest na rysunku 21 jako zamalowane na zielono pole prostokątów.



rys. 21

Zauważmy, że ponieważ czynnik $\frac{b-a}{n}$ występuje we wszystkich składnikach sumy Riemanna, możemy go wyłączyć przed znak sumy.

Wersja 5 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są lewymi końcami):

Założenia: Funkcja $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Przyjmujemy, że n-ty podział przedziału $[a,\,b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k}=a+k\cdot\frac{b-a}{n}$$

oraz że są one jednocześnie y-kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f:

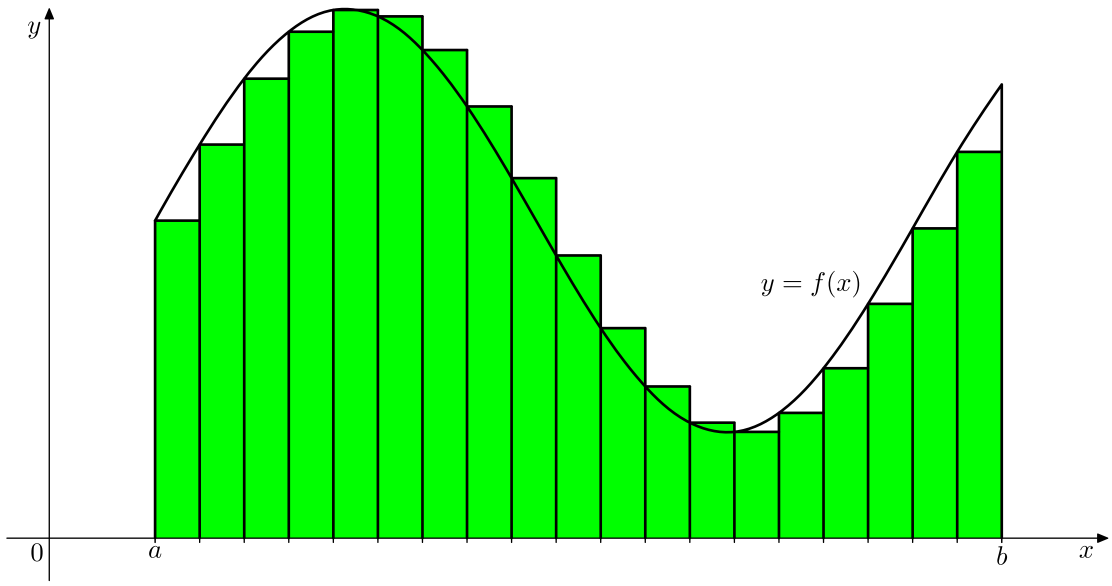
$$y_{n,k}=x_{n,k-1}=a+(k-1)\cdot\frac{b-a}{n}\,.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+(k-1)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(a+(k-1)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Suma Riemanna odpowiadająca opisanemu wyżej podziałowi przedziału na równe części przedstawiona jest na rysunku 22 jako zamalowane na zielono pole prostokątów.



rys. 22

Używanie sum Riemanna do wyliczania całki oznaczonej jest dość żmudne, a czasem wręcz może być praktycznie niemożliwe. I na dłuższą metę wydaje się bezcelowe, skoro mamy dużo prostszy sposób na obliczanie całek oznaczonych. Ale można w drugą stronę... Nie uprzedzajmy jednak tego, co za chwilę się stanie i popatrzmy na taki przykład:

Przykład 50:
Obliczyć granicę (ciągu):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right).$$

Rozwiązanie:
Podejście 1 (naiwnie optymistyczne i dlatego nieudane):

Szacujemy sumę pod znakiem granicy od dołu i od góry, aby skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Oszacowanie odbywa się przez pomnożenie liczby składników (czyli n) przez wspólne oszacowanie składników, czyli składnik najmniejszy bądź największy. Otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\leftarrow\frac{1}{2}=\frac{n}{2n}\qquad\leqslant\qquad\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\qquad\leqslant\qquad\frac{n}{n+1}\to 1\,.$$

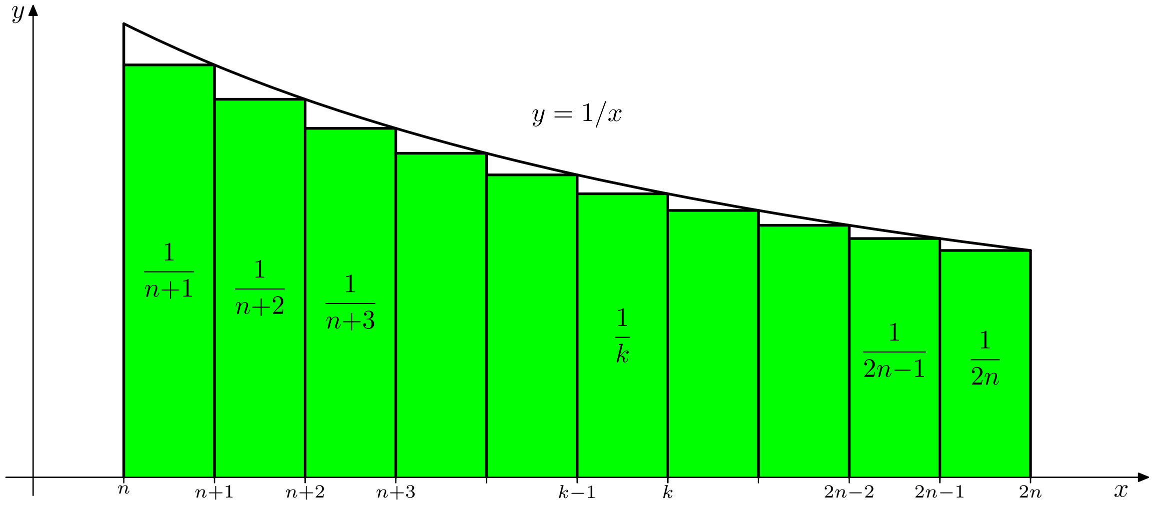
Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do różnych granic, twierdzenie o trzech ciągach nie ma tu zastosowania. Póki co nie tylko nie znamy granicy ciągu, ale nawet nie mamy pewności, że ciąg jest zbieżny, bo teoretycznie można sobie wyobrazić, że jego wyrazy dziwnie oscylują gdzieś między $1/2$ i 1 – raczej mało prawdopodobne, ale prostego argumentu wykluczającego taką oscylację nie widać.

Czyżbyśmy nieumiejętnie przeprowadzili oszacowania? Ale jak to zrobić lepiej, skoro iloraz pierwszego składnika sumy do ostatniego dąży do 2, a wielkość składników płynnie się zmienia. Nasze oszacowanie wrzuciło wszystkie składniki do jednego wora i dlatego było niedokładne (bo w tym worze składniki różniły się o czynnik prawie 2), ale nie widać jak w elementarny sposób uzyskać oszacowania dolne i górne dążące do tej samej granicy.

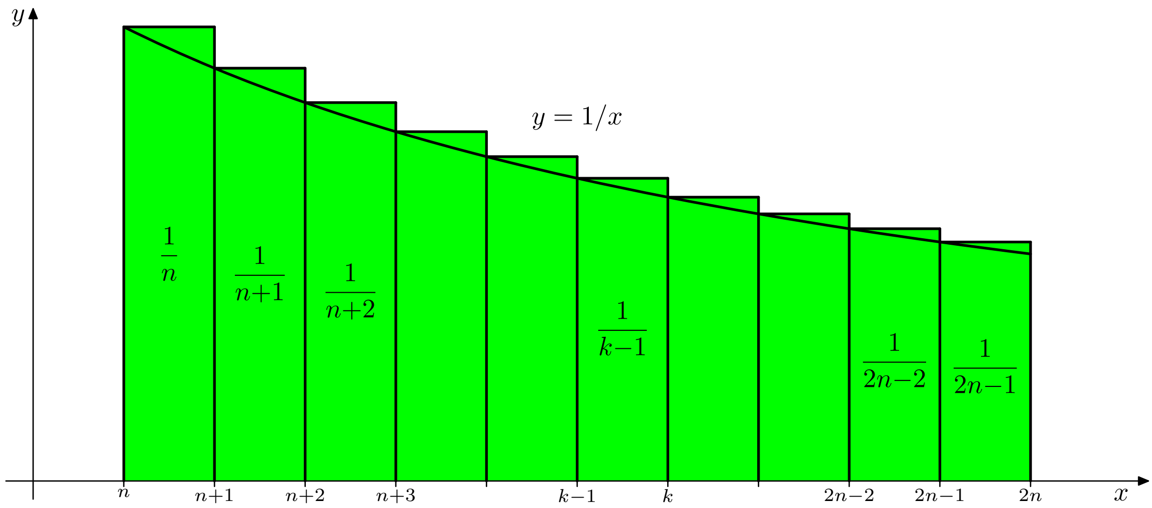
Podejście 2 (wykorzystujące specjalną postać sumy pod znakiem granicy):

Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach, ale potrzebujemy naprawdę precyzyjnych oszacowań. W celu ich uzyskania rozważymy funkcję $f:[n,\,2n]\to\mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x)=1/x$. Wówczas całka $\int\limits_n^{2n}\frac{dx}{x}$ jest równa polu figury pod wykresem funkcji f, a ponadto porównanie tego pola z polami zielonych figur złożonych z prostokątów na rysunkach 23 i 24 prowadzi do nierówności:

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\;<\;\int\limits_n^{2n}\frac{dx}{x}\;<\;\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k}\,.$$



rys. 23



rys. 24

Ponieważ

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=n}^{2n} = \ln(2n) - \ln n = \ln 2\,,$$

otrzymujemy nierówności

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \;<\; \ln 2 \;<\; \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\,.$$

Stąd

$$\ln 2 - \frac{1}{2n} \;<\; \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \;<\; \ln 2\,.$$

Ponieważ otrzymane wyżej oszacowania dolne i górne dążą do tej samej granicy równej $\ln 2$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2\,.$$

Dość nieoczekiwana wartość szukanej granicy ciągu całkowicie rozgrzesza nas z niepowodzenia przy próbie skorzystania z twierdzenia o trzech ciągach po prostych elementarnych oszacowaniach – trudno bowiem oczekiwać, że proste elemnetarne rozważania doprowadzą do granicy równej $\ln 2$.

W powyższym rozwiązaniu nie było ciągu sum całkowych Riemanna. Natomiast wykorzystaliśmy interpretację geometryczną całki oznaczonej do uzyskania na tyle precyzujnych oszacowań, aby można było skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Wprawdzie cały czas używaliśmy tej samej funkcji, ale dla każdego n był inny przedział całkowania – jednak wartość całki oznaczonej była za każdym razem taka sama. Jest to wynikiem prostoty przykładu i pewnego zbiegu okoliczności. Jednak w innych tego typu przykładach takie podejście może być niewygodne bądź wręcz nieskuteczne. Mniej naturalne w tym konkretnym przykładzie, ale bardziej ogólne jeeeeeest ...

Podejście 3 (najogólniejsze, wykorzystujące zbieżność ciągu sum Riemanna do całki oznaczonej):

Przypomnimy wcześniejszy fragment wykładu:

Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawymi końcami):

Założenia: Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.
Przyjmujemy, że n-ty podział przedziału $[a,b]$ składa się z punktów

$$x_{n,k}=a+k\cdot\frac{b-a}{n}$$

oraz że są one jednocześnie y-kami wybranymi do obliczania wartości funkcji f:

$$y_{n,k}=x_{n,k}=a+k\cdot\frac{b-a}{n}\,.$$

Wówczas ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}\cdot(b-a)\right)\right)=\int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad (\heartsuit)$$

Aby wykorzystać rachunek całkowy do obliczenia granicy ciągu, którego wyrazami są coraz dłuższe sumy, trzeba tę granicę wpasować do postaci lewej strony wzoru ($\heartsuit$). Zwróćmy uwagę, że po lewej stronie są sumy, których składniki nie zawierają ani gołego n, ani gołego k, a jedynie iloraz k/n. Ponadto sumowane są wartości jakiejś funkcji z argumentami skaczącymi o taką wartość[96] jak czynnik występujący przez znakiem sumy.

Zobaczmy jak to działa w rozważanym przez nas przykładzie:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}= \qquad \text{zmieniliśmy numerację składników}$$

[96] W ogólnym wzorze jest to $(b-a)/n$, ale często bywa po prostu $1/n$.

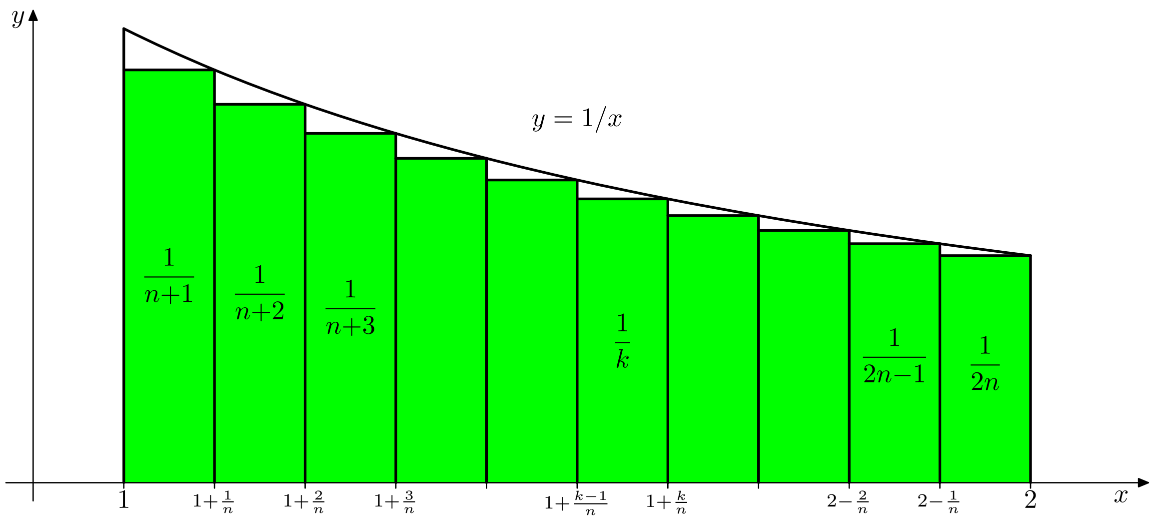
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\right) = \qquad \text{wyciągnęliśmy przed sumę czynnik } 1/n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \qquad \text{zapisaliśmy składniki jako wartości funkcji } f(x)=1/x$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x} = \qquad \text{skorzystaliśmy ze wzoru } (\heartsuit)$$

$$= \ln x \Big|_{x=1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\,. \qquad \text{obliczyliśmy wartość całki}$$

Na rysunku 25 na zielono zaznaczona jest figura o polu równym n-temu wyrazowi rozważanego ciągu.



rys. 25

Zanim przejdziemy do dalszych przykładów, odnotujmy możliwe warianty wzoru ze strony 60:

Wersja 4 (n-ty podział jest podziałem na n równych przedziałów, y-ki są prawymi końcami):

Ciąg odpowiednich sum całkowych Riemanna jest zbieżny do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)=\int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad (\spadesuit)$$

Pierwsza modyfikacja wynika z konieczności. Otóż dana w zadaniu suma może nie mieć n składników, a np. $2n$, $5n$ czy $10n$. Na tę okoliczność trzeba mieć wariant wzoru ($\spadesuit$), który odpowiada podziałowi przedziału całkowania na inną niż n liczbę przedzialików równej długości. Niech tych przedzialików będzie Mn. Wówczas wzór ($\spadesuit$) przybiera postać

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{Mn}\cdot\sum_{k=1}^{Mn} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{Mn}\right)\right)=\int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad (\spadesuit\spadesuit)$$

Druga modyfikacja wynika z wygody. Suma może mieć Mn składników, ale może być wygodniej numerować je inaczej niż liczbami od 1 do Mn. Powiedzmy, że składniki wygodnie jest ponumerować liczbami od $Pn+1$ do $(P+M)n$. Wtedy wzór ($\spadesuit$) przybiera postać

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{n}\cdot\sum_{k=Pn+1}^{(P+M)n} f\left(a+k\cdot\frac{c}{n}\right)\right)=\int_{a+cP}^{a+c(P+M)} f(x)\,dx\,. \qquad (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Zauważ, że we wzorze ($\spadesuit\spadesuit\spadesuit$) czynnik przed znakiem sumy jest równy przyrostowi argumentu funkcji f w kolejnych składnikach, a przedział całkowania odpowiada zakresowi, jaki przebiegają argumenty funkcji f w składnikach sumy.

Na przykład we wzorze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\cdot\sum_{k=2n+1}^{7n} f\left(14+\frac{3k}{n}\right)\right)=\int_{???}^{???} f(x)\,dx$$

czynnik przed sumą jest równy $3/n$ i o tyle przyrastają argumenty funkcji f w kolejnych składnikach sumy. Skoro w sumie wskaźnik k przebiega od z grubsza $2n$ do $7n$, to tym samym argumenty funkcji f przebiegają od 20 do 35 i takie właśnie powinny być granice całkowania.

Przykład 51:
Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{k^2-2kn+2n^2}\,.$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{k^2-2kn+2n^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\cdot\frac{k}{n}+2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=n+1}^{2n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=n+1}^{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\frac{1}{x^2-2x+2}\,dx=\int_1^2\frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=\operatorname{arctg}t\,\Big|_{t=0}^{1}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}\,,$$

gdzie po drodze wykonaliśmy podstawienie $t=x-1$, z formalnym wzorem $dt=dx$ i przekształceniem przedziału całkowania $x\in[1,\,2]$ na $t\in[0,\,1]$. Otrzymujemy więc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{k^2-2kn+2n^2}=\frac{\pi}{4}\,.$$

Przykład 52:
Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{(2n+1)\cdot\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{n}}{(2n+2)\cdot\sqrt{n+2}}+\frac{\sqrt{n}}{(2n+3)\cdot\sqrt{n+3}}+\frac{\sqrt{n}}{(2n+4)\cdot\sqrt{n+4}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n}}{(2n+k)\cdot\sqrt{n+k}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{(4n-2)\cdot\sqrt{3n-2}}+\frac{\sqrt{n}}{(4n-1)\cdot\sqrt{3n-1}}+\frac{\sqrt{n}}{(4n)\cdot\sqrt{3n}}\right).$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{n}}{(2n+k)\cdot\sqrt{n+k}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}f\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $2n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3\frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}\,dx=2\cdot\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=2\cdot\operatorname{arctg}t\Bigg|_{t=1}^{\sqrt{3}}=2\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}-2\cdot\operatorname{arctg}1=2\cdot\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6},$$

gdzie po drodze wykonaliśmy podstawienie $t=\sqrt{x}$, czyli $x=t^2$, z formalnym wzorem $dx=2t\,dt$ i przekształceniem przedziału całkowania $x\in[1,3]$ na $t\in\left[1,\sqrt{3}\right]$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $\pi/6$.

Przykład 53:
Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}n^p\cdot\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+8+5\sqrt{5}+\ldots+k\sqrt{k}+\ldots+(5n-1)\sqrt{5n-1}+5n\sqrt{5n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:
Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$n^p\cdot\sum_{k=1}^{5n}k^{3/2}=n^{p+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{5n}k^{3/2}=n^{p+5/2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{5n}\left(\frac{k}{n}\right)^{3/2}=n^{p+5/2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{5n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=x^{3/2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $5n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{5n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^5 x^{3/2}\,dx=\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\Bigg|_{x=0}^{5}=\frac{2}{5}\cdot 5^{5/2}=2\cdot 5^{3/2}=10\cdot\sqrt{5}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/2}$ będzie równy 0, czyli dla $p=-5/2$.

Odpowiedź: Dla $p=-5/2$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $10\cdot\sqrt{5}$.