Całkowanie przez części w całce oznaczonej

A teraz wyjaśnimy sobie, jak w całce oznaczonej całkować przez części. Ktoś powie: A co tu wyjaśniać? Przecież jak umiemy obliczać całki nieoznaczone i mamy prosty wzór wyrażający całkę oznaczoną jako przyrost funkcji pierwotnej, to czego nam więcej trzeba? Ano popatrzmy na taki przykład:

Przykład 43:

Obliczyć całkę $\int\limits_1^2 x^3\cdot e^x\,dx$.

Rozwiązanie:

Aby obliczyć tę całkę, trzeba trzykrotnie całkować przez części. Na boku[84] obliczymy całkę nieoznaczoną, a potem wykorzystamy otrzymaną funkcję pierwotną do obliczenia całki oznaczonej:

$$\int x^3\cdot e^x\,dx=$$

$$=x^3\cdot e^x-3\cdot\int x^2\cdot e^x\,dx=$$

$$=x^3\cdot e^x-3\cdot x^2\cdot e^x+6\cdot\int x\cdot e^x\,dx=$$

$$=x^3\cdot e^x-3\cdot x^2\cdot e^x+6\cdot x\cdot e^x-6\cdot\int e^x\,dx=$$

$$=x^3\cdot e^x-3\cdot x^2\cdot e^x+6\cdot x\cdot e^x-6\cdot e^x+C\,.$$

Wobec tego:

$$\int\limits_1^2 x^3\cdot e^x\,dx=\left(x^3\cdot e^x-3\cdot x^2\cdot e^x+6\cdot x\cdot e^x-6\cdot e^x\right)\Bigg|_{x=1}^{2}=$$

$$=\left(8\cdot e^2-12\cdot e^2+12\cdot e^2-6\cdot e^2\right)-(e-3\cdot e+6\cdot e-6\cdot e)=2\cdot e^2+2\cdot e\,.$$

Wyszło, ale widać w tym pewne niedogodności. Po pierwsze, trzeba obliczać całkę nieoznaczoną na boku. Po drugie, licząc tę całkę, przy kolejnych całkowaniach przez części trzeba pracowicie przepisywać kawałek funkcji pierwotnej, którego dokładna postać i tak nam nie jest do niczego potrzebna, bo interesuje nas tylko jej przyrost.

Można jednym ciągiem przeprowadzić rachunek z całkowaniem przez części w wersji dla całki oznaczonej, obliczając na bieżąco przyrosty fragmentów funkcji pierwotnej pojawiających się w trakcie kolejnych całkowań przez części. Wówczas rozważany przykład można rozwiązać następująco:

$$\int\limits_1^2 x^3\cdot e^x\,dx=x^3\cdot e^x\Bigg|_{x=1}^{2}-3\cdot\int\limits_1^2 x^2\cdot e^x\,dx=8e^2-e-3\cdot\left(x^2\cdot e^x\Bigg|_{x=1}^{2}\right)+6\cdot\int\limits_1^2 x\cdot e^x\,dx=$$

[84] Akurat w tym wypadku ”na boku” oznacza ”poniżej”.

$$=8e^2-e-3\cdot\left(4e^2-e\right)+6\cdot\left(x\cdot e^x\Big|_{x=1}^{2}\right)-6\cdot\int_1^2 e^x\,dx=-4e^2+2e+6\cdot\left(2e^2-e\right)-6\cdot\left(e^x\Big|_{x=1}^{2}\right)=$$

$$=8e^2-4e-6\cdot\left(e^2-e\right)=2e^2+2e\,.$$

Przykład 44:

Obliczyć całkę $\int\limits_0^\pi \sin x\cdot e^x\,dx$.

Rozwiązanie:

Sama strategia całkowania jest taka sama jak w całce nieoznaczonej. Tutaj strategia mówi: Scałkuj dwukrotnie przez części, wrócisz do wyjściowej całki, ale ze współczynnikiem innym niż 1, ułóż i rozwiąż powstałe w ten sposób równanie. No to całkujemy różniczkując sinusa, a całkując e^x. Pamiętajmy przy tym, że szukana całka w tym wypadku jest liczbą, oznaczmy ją przez I. Otrzymujemy

$$I=\int_0^\pi \sin x\cdot e^x\,dx=\underbrace{\sin x\cdot e^x\Big|_{x=0}^{\pi}}_{=\,0}-\int_0^\pi \cos x\cdot e^x\,dx=\underbrace{-\cos x\cdot e^x\Big|_{x=0}^{\pi}}_{=\,e^\pi+1}-\underbrace{\int_0^\pi \sin x\cdot e^x\,dx}_{=\,I}=e^\pi+1-I\,,$$

co prowadzi do równania

$$I=e^\pi+1-I\,,$$

a to daje

$$I=\frac{e^\pi+1}{2}\,.$$

Wobec tego

$$\int_0^\pi \sin x\cdot e^x\,dx=\frac{e^\pi+1}{2}\,.$$

Przykład 45:

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Dopisujemy czynnik 1 i całkujemy przez części:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx=\int_0^{\sqrt{3}} 1\cdot\operatorname{arctg} x\,dx=x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_{x=0}^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}-0\cdot\operatorname{arctg}0-\left(\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}\Big|_{x=0}^{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\ln 4}{2}-\frac{\ln 1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$.

Całkowanie przez podstawienie w całce oznaczonej

Zaczniemy od następującego przykładu:

Przykład 46:
Obliczyć całkę $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Nasza dotychczasowa wiedza pozwala na przyjęcie następującej strategii:
• Obliczymy na boku całkę nieoznaczoną, a następnie wyliczymy przyrost funkcji pierwotnej.
• W celu obliczenia całki nieoznaczonej najpierw wykonamy podstawienie, aby w trójmianie kwadratowym w mianowniku funkcji podcałkowej pozbyć się składnika liniowego $2x$.
• Potem wykonamy drugie podstawienie, aby wyraz wolny w mianowniku stał się równy 1.
• Obliczymy całkę w trzeciej zmiennej, to będzie pewnie jakiś arcus tangens.
• Wrócimy z wynikiem do drugiej zmiennej.
• Wrócimy z wynikiem do pierwszej zmiennej.
• Obliczymy przyrost funkcji pierwotnej na przedziale całkowania.

No to do roboty:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \qquad \text{Podstawienie: } y=x+1, \quad x=y-1, \quad dx=dy$$

$$= \int \frac{dy}{y^2+4} = \int \frac{dy}{4\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^2+4} = \qquad \text{Podstawienie: } t=\frac{y}{2}, \quad y=2t, \quad dy=2dt$$

$$= \int \frac{2dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C\,.$$

Skoro obliczyliśmy już całkę nieoznaczoną, to obliczenie oznaczonej jest prościutkie:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_{x=-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{-1+1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}0 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{8}\,.$$

Wyszło, ale superwygodna metoda zapisu to to nie jest. O wiele krócej będzie wykonywać **podstawienie w całce oznaczonej.**

A jaki jest wzór/procedura wykonywania takiego podstawienia? Wzór jest jeden, ale ma on dwa oblicza. Zaczniemy od oblicza bezmyślnie formalistycznego. W tym celu opiszmy ogólną sytuację pojedynczego całkowania przez podstawienie.

Przypomnijmy, że w całce nieoznaczonej całkowanie przez podstawienie bierze się ze wzoru na pochodną złożenia funkcji:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x), \qquad \text{przyjmujemy } f=F'$$

który można przepisać jako

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+C\,.$$

Samo podstawienie zapisujemy jako $y=g(x)$ z formalnym wzorem $dy=g'(x)\,dx$ i w konsekwencji sprowadzamy całkowanie do znalezienia funkcji pierwotnej funkcji f. W przyjętym zapisie podstawienie i powrót do starej zmiennej wyglądają tak:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y)+C = F(g(x))+C\,.$$

Gdybyśmy chcieli obliczyć odpowiednią całkę oznaczoną, to wyglądałoby to mniej więcej tak:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{b} = F(g(b))-F(g(a))\,.$$

Zauważmy, że wynik jakiego oczekujemy, jest przyrostem funkcji F od $g(a)$ do $g(b)$. Ten sam efekt uzyskamy wykonując obliczenia na całkach oznaczonych, jednak przy podstawieniu musimy odpowiednio zmienić granice całkowania. Całka po x, które zmienia się w przedziale od a do b, zamieni się na całkę po y zmieniającym się w przedziale[85] od $g(a)$ do $g(b)$.

W rozważanym przykładzie podstawienie w całce oznaczonej będzie wyglądać następująco:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \qquad \text{Podstawienie: } y=x+1,\quad x=y-1,\quad dx=dy$$

$$= \int_0^2 \frac{dy}{y^2+4} = \int_0^2 \frac{dy}{4\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^2+4} = \qquad \text{Podstawienie: } t=\frac{y}{2},\quad y=2t,\quad dy=2dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} t\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{8}\,.$$

Przy każdym podstawieniu zmieniamy w odpowiedni sposób granice całkowania: x'owi przebiegającemu przedział $[-1,\,1]$ odpowiada y przebiegający przedział $[0,\,2]$, a temu z kolei odpowiada t przebiegające przedział $[0,\,1]$.

Zauważmy, że po każdym podstawieniu możemy zapomnieć o starej zmiennej[86]. Całka oznaczona jest bowiem liczbą rzeczywistą, a podstawienie sprawia, że liczba ta zamiast być wyrażoną przez całkę w starej zmiennej, zostaje wyrażona jako całka w nowej zmiennej.

Trzeba do tego dodać jeszcze, że w podstawieniu $y=g(x)$ prowadzącym do

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

[85] Przy chwilowym założeniu, że fukcja g jest rosnąca na przedziale $[a,\,b]$.

[86] W kontraście do całki nieoznaczonej, która jest funkcją (czy dokładniej: rodziną funkcji) zależną od tej zmiennej, która była użyta w wyjściowej całce. Musimy więc na koniec do tej wyjściowej zmiennej powrócić.

funkcja g musi być ściśle monotoniczna[87] na przedziale $[a,b]$. Nie musi być rosnąca, może być malejąca, ale wtedy po podstawieniu górna granica całkowania będzie mniejsza od dolnej – takiego cudeńka jeszcze na tym wykładzie nie oglądaliśmy. Nic nie szkodzi, albowiem wzór/umowa na taką okoliczność jest bardzo prosta: **W całce oznaczonej można zamienić kolejność granic całkowania zmieniając znak całki.** Oczywiście dla porządku staramy się, aby dolna granica była mniejsza od górnej, ale jak w ferworze rachunków będzie na odwrót, to nie ma najmniejszego powodu wpadać w panikę.

Przedstawione wyżej formalne oblicze podstawienia w całce oznaczonej na razie wystarczy, aby obliczać całki. O drugim, geometrycznym obliczu tego podstawienia, opowiem Wam po następujących trzech przykładach.

Przykład 47:

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_{-2}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x^2+2x+1}}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej, a następnie dzielimy przedział całkowania na dwa przedziały:

$$\int\limits_{-2}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x^2+2x+1}} = \int\limits_{-2}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[4]{(x+1)^2}} = \int\limits_{-2}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt{|x+1|}} =$$

$$= \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{1+\sqrt{|x+1|}} + \int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt{|x+1|}} = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{1+\sqrt{-x-1}} + \int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} . \qquad (\spadesuit)$$

W pierwszej całce ostatniej sumy wzoru ($\spadesuit$) wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{-x-1}, \qquad t^2=-x-1, \quad t\geqslant 0, \qquad x=-t^2-1, \quad t\geqslant 0$$

i formalnie

$$dx=-2t\,dt.$$

Ponadto $x=-2$ odpowiada $t=1$, a $x=-1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-2,\,-1]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,\,1]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{1+\sqrt{-x-1}} = \int\limits_{1}^{0} \frac{-2t\,dt}{1+t} = -2\cdot\int\limits_{1}^{0} \frac{t\,dt}{1+t} = 2\cdot\int\limits_{0}^{1} \frac{t+1-1}{1+t}\,dt = 2\cdot\int\limits_{0}^{1} 1-\frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$=2\cdot\int\limits_{0}^{1} dt - 2\cdot\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{1+t} = 2-2\cdot\left(\ln|1+t|\,\Bigg|_{t=0}^{1}\right) = 2-2\cdot(\ln 2-\ln 1) = 2-2\cdot\ln 2 .$$

Z kolei w drugiej całce ostatniej sumy wzoru ($\spadesuit$) wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{x+1}, \qquad t^2=x+1, \quad t\geqslant 0, \qquad x=t^2-1, \quad t\geqslant 0$$

[87] Musi być też różniczkowalna, ale to chyba w tym kontekście oczywista oczywistość.

i formalnie

$$dx = 2t\,dt.$$

Ponadto $x=-1$ odpowiada $t=0$, a $x=8$ odpowiada $t=3$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-1, 8]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0, 3]$.

Otrzymujemy

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} \int_{0}^{3} \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\cdot\int_{0}^{3} \frac{t\,dt}{1+t} = 2\cdot\int_{0}^{3} \frac{t+1-1}{1+t}\,dt = 2\cdot\int_{0}^{3} 1-\frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\cdot\int_{0}^{3} dt - 2\cdot\int_{0}^{3} \frac{dt}{1+t} = 6-2\cdot\left(\ln|1+t|\Big|_{t=0}^{3}\right) = 6-2\cdot(\ln 4-\ln 1) = 6-4\cdot\ln 2\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $8-6\cdot\ln 2$.

Uwaga: W prawidłowo uproszczonym wyniku **ln** może wystąpić tylko raz.

Przykład 48:

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{1}^{3} \frac{x+1}{x^4+3x^2}\,dx\,.$$

Uprościć wynik doprowadzając go do postaci, która nie zawiera symbolu "arctg" i zawiera co najwyżej jeden symbol "ln".

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste[88]:

$$\frac{x+1}{(x^2+3)\cdot x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}\,,$$

$$x+1 = (Ax+B)\cdot x^2+C\cdot\left(x^3+3x\right)+D\cdot\left(x^2+3\right)\,,$$

$$x+1 = Ax^3+Bx^2+Cx^3+3Cx+Dx^2+3D\,,$$

$$\begin{cases} 0 &=& A+C\,,\\ 0 &=& B+D\,,\\ 1 &=& 3C\,,\\ 1 &=& 3D\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=D=1/3\,,\\ A=B=-1/3\,, \end{cases}$$

Wobec tego

$$\int_{1}^{3} \frac{x+1}{x^4+3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int_{1}^{3} -\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx =$$

[88] Przy całce nieoznaczonej literka C była zarezerwowana na stałą całkowania, więc unikaliśmy użycia jej jako jednego z szukanych współczynników rozkładu na ułamki proste. Ponieważ tu nie ma ani całki nieoznaczonej, ani stałej całkowania, nie ma powodu, aby literkę C omijać.

$$=\frac{1}{3}\cdot\int\limits_1^3 -\frac{x}{x^2+3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx-\frac{1}{3}\cdot\int\limits_1^3\frac{1}{x^2+3}\,dx\,.$$

Obliczamy każdą z dwóch powyższych całek z osobna. W pierwszej całce otrzymujemy

$$\int\limits_1^3 -\frac{x}{x^2+3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{\ln\left(x^2+3\right)}{2}+\ln|x|-\frac{1}{x}\Bigg|_{x=1}^{3}=$$

$$=-\frac{\ln 12}{2}+\ln 3-\frac{1}{3}+\frac{\ln 4}{2}-\ln 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{3}+\frac{\ln 3}{2}\,,$$

a po podstawieniu $x=t\sqrt{3}$, $t=x/\sqrt{3}$, $dx=\sqrt{3}\,dt$ wyliczamy wartość drugiej całki

$$\int\limits_1^3\frac{1}{x^2+3}\,dx=\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{3t^2+3}\,dt=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg} t\Bigg|_{t=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\,.$$

Wobec tego dana w zadaniu całka ma wartość

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{\ln 3}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\pi}{18}=\frac{2}{9}+\frac{\ln 3}{6}-\frac{\pi\sqrt{3}}{54}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{2}{9}+\frac{\ln 3}{6}-\frac{\pi\sqrt{3}}{54}$.

Przykład 49:

Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_2^{98}\frac{dx}{x+\sqrt{x+2}}$.

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt{x+2}$, czyli $x=t^2-2$ i formalnie $dx=2t\,dt$. Wówczas przy x przebiegającym przedział $[2, 98]$ zmienna t przebiega przedział $[2, 10]$. Otrzymujemy

$$\int\limits_2^{98}\frac{dx}{x+\sqrt{x+2}}=\int\limits_2^{10}\frac{2t\,dt}{t^2-2+t}=\int\limits_2^{10}\frac{2t\,dt}{t^2+t-2}=\int\limits_2^{10}\frac{2t\,dt}{(t-1)\cdot(t+2)}\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{2t}{(t-1)\cdot(t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+2}\,,$$

$$2t=A\cdot(t+2)+B\cdot(t-1)\,,$$

dla $t=-2$ $\quad -4=B\cdot(-3)\,,\quad$ skąd $\quad B=4/3\,,$

dla $t=1$ $\quad 2=A\cdot 3\,,\quad$ skąd $\quad A=2/3\,.$

Kontynuujemy całkowanie (nie piszemy modułu pod znakiem logarytmu, bo argument logarytmu jest dodatni w przedziale całkowania):

$$\int_2^{10} \frac{2t\,dt}{(t-1)\cdot(t+2)} = \int_2^{10} \frac{2/3}{t-1} + \frac{4/3}{t+2}\,dt = \frac{2}{3}\cdot\ln(t-1) + \frac{4}{3}\cdot\ln(t+2)\Big|_{t=2}^{10} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\ln 9 + \frac{4}{3}\cdot\ln 12 - \frac{2}{3}\cdot\ln 1 - \frac{4}{3}\cdot\ln 4 = \frac{4}{3}\cdot\ln 3 + \frac{4}{3}\cdot(\ln 4 + \ln 3) - \frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{4}{3}\cdot\ln 4 = \frac{8}{3}\cdot\ln 3\,.$$

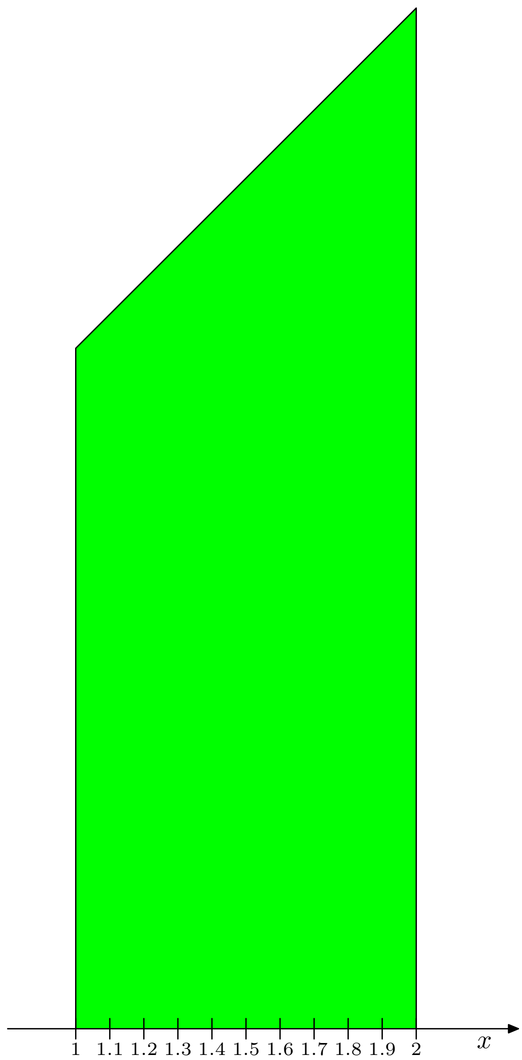
Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{8}{3}\cdot\ln 3$.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

A teraz opowiem Wam o geometrycznym obliczu wzoru na całkowanie przez podstawienie w całce oznaczonej. W zasadzie z punktu widzenia użytkowego nie wnosi to nic nowego, bo formalny wzór już poznaliśmy, dobrze jednak mieć jakieś intuicje co się liczy i dlaczego, a nie tylko bezmyślnie mielić wzorkami.

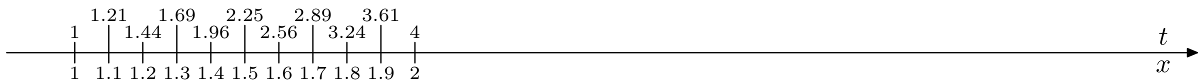
Zapomnijmy na razie o sposobie obliczania całek oznaczonych, traktując całkę oznaczoną tylko i wyłącznie jako pole odpowiedniej figury pod wykresem funkcji podcałkowej.

Wobec tego całka $\int_1^2 x+1\,dx$ jest polem trapezu zamalowanego na zielono na rysunku 11. Pole tego trapezu jest równe 5/2 i tyleż wynosi wartość tej całki, ale przecież nie o jej wyliczenie w tym momencie chodzi, a o pokazanie mechanizmu całkowania przez podstawienie.



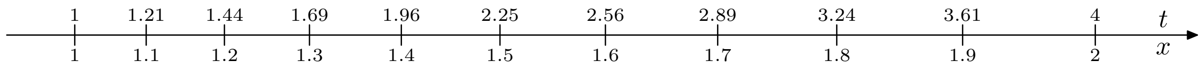
rys. 11

Zapragnijmy teraz wykonać w rozważanej całce podstawienie $t=x^2$, czyli $x=\sqrt{t}$. Co to w praktyce oznacza? Ano tyle, że inaczej chcemy opisać współrzędną poziomą, która teraz jest oznaczona literką x, a za moment będzie oznaczona literką t według przyjętego przed chwilą przelicznika. W zasadzie mógłbym do punktów interesującego mnie przedziału $x\in[1, 2]$ dopisać odpowiednie wartości $t\in[1, 4]$ jak na rysunku 12.



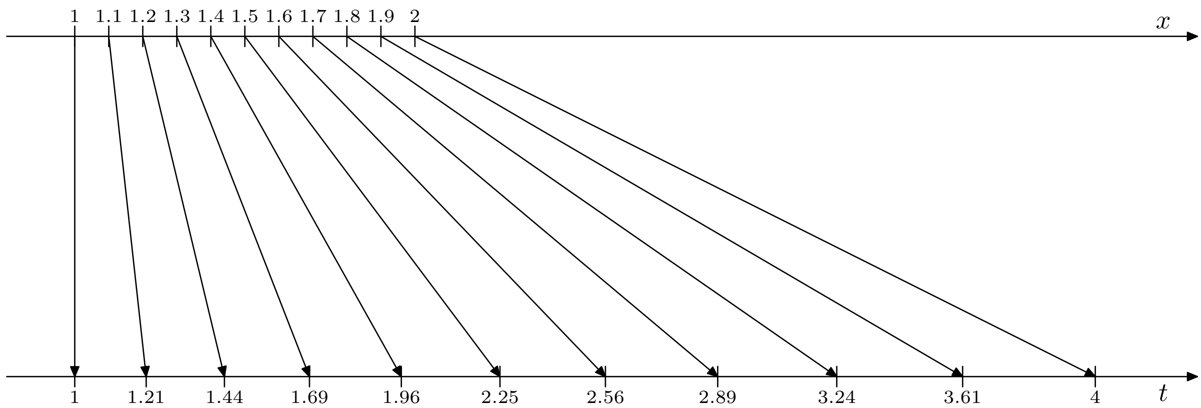
rys. 12

Wyobraźmy sobie, że ta podwójnie wyskalowana oś liczbowa wykonana jest z rozciągliwego materiału i rozciągnijmy ją tak, aby to skala opisana zmienną t odpowiadała geometrycznym odległościom między punktami (rys. 13).



rys. 13

Jeżeli chcielibyśmy prześledzić jak w fizycznym świecie przemieściły się poszczególne punkty podczas rozciągania osi liczbowej wyskalowanej x'ami do osi wyskalowanej t'kami, spójrzmy na rysunek 14.



rys. 14

Zauważmy, że przy takim rozciąganiu, zwiększają[89] się odległości między punktami. Jak bardzo się zwiększają? O tym mówi nam stosunek przyrostu t do przyrostu x, czyli jak by to zapisać w konwencji fizycznej: $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, a to w mikroskali staje się pochodną funkcji użytej w podstawieniu do przeliczania jednej zmiennej na drugą: $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d\,x^2}{dx}=2x$.

To oznacza w szczególności, że w pobliżu lewego końca rozważanego przedziału[90] odległości między punktami zwiększają się przy rozciąganiu dwukrotnie, a w pobliżu prawego[91] czterokrotnie.

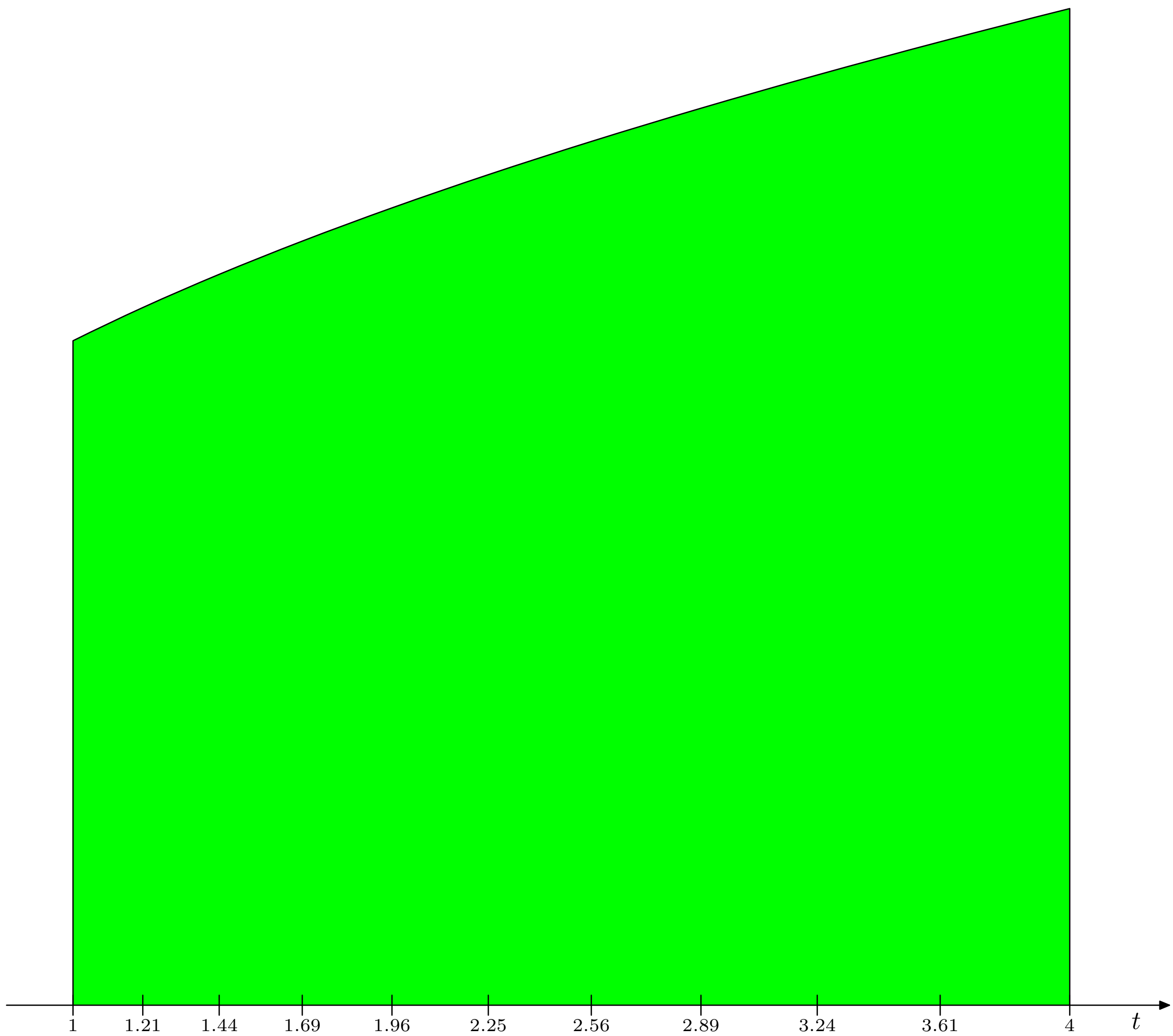
[89] Tu akurat się zwiększają, ale przy innym podstawieniu mogłyby się zmniejszać, co odpowiadałoby nie rozciąganiu, ale ściskaniu elastycznej osi liczbowej.

[90] Czyli $x=1$ odpowiadające $t=1$.

[91] Czyli $x=2$ odpowiadające $t=4$.

A gdybyśmy chcieli z powrotem skurczyć oś t'ków do osi x'ów, to skala deformacji byłaby w makroskali równa $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, a w mikroskali $\frac{dx}{dt} = \frac{d\sqrt{t}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, co oczywiście odpowiada $\frac{1}{2x}$, skoro ściskanie jest cofnięciem wcześniejszego rozciągania w skali $2x$.

Wyobraźmy sobie teraz, że nie tylko oś pozioma jest rozciągliwa, ale cały rozważany obszar narysowany jest na elastycznej dwuwymiarowej błonie i rozciągamy go w poziomie tak, jak rozciągnęliśmy przed chwilą oś poziomą, a w pionie niczego nie zmieniamy (rys. 15).



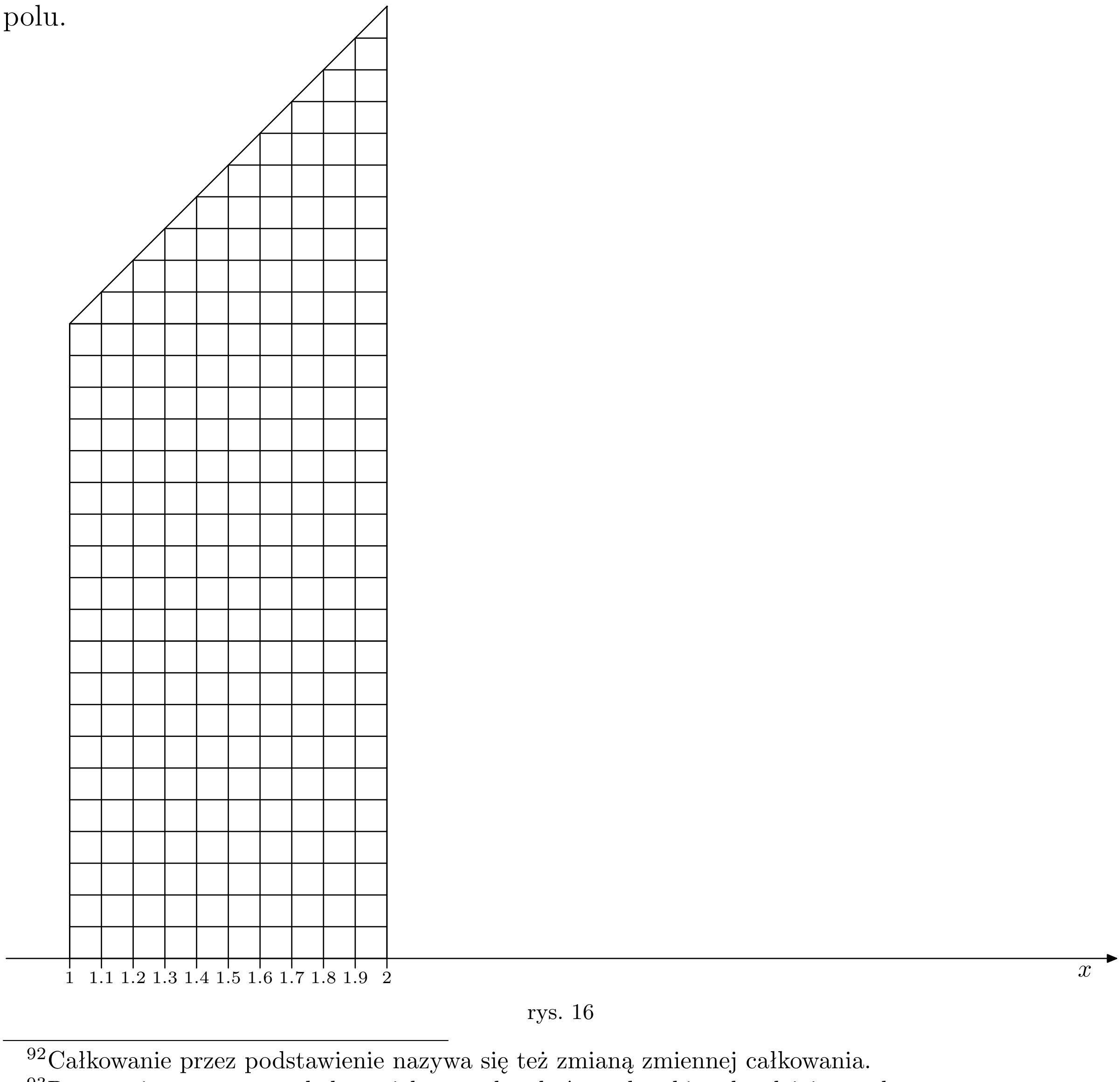
rys. 15

Pole tego obszaru wyraża się całką $\int_1^4 \sqrt{t}+1\,dt$. Gdyby ktoś naiwnie pomyślał, że przy zmianie zmiennej całkowania[92] wystarczy przeliczyć funkcję podcałkową z jednej zmiennej na drugą i zmienić przedział całkowania, a przy tym bezmyślnie zamienić dx na dt, otrzymałby taki "wzorek":

$$\int_1^2 x+1\,dx = \int_1^4 \sqrt{t}+1\,dt\,.$$

"Wzorek" ten oparty jest na błędnym przekonaniu, że po opisanym wyżej rozciągnięciu zachowuje się pole obszaru, co ewidentnie nie jest prawdą.

Aby łatwiej wyobrażać sobie wpływ deformacji rozważanej figury na pole powierzchni, pokratkujmy[93] wyjściową figurę w pionie i poziomie co 1/10. (rys. 16). Tym samym jest ona podzielona na kwadraciki o polu 1/100 i trochę trójkącików o dwa razy mniejszym polu.

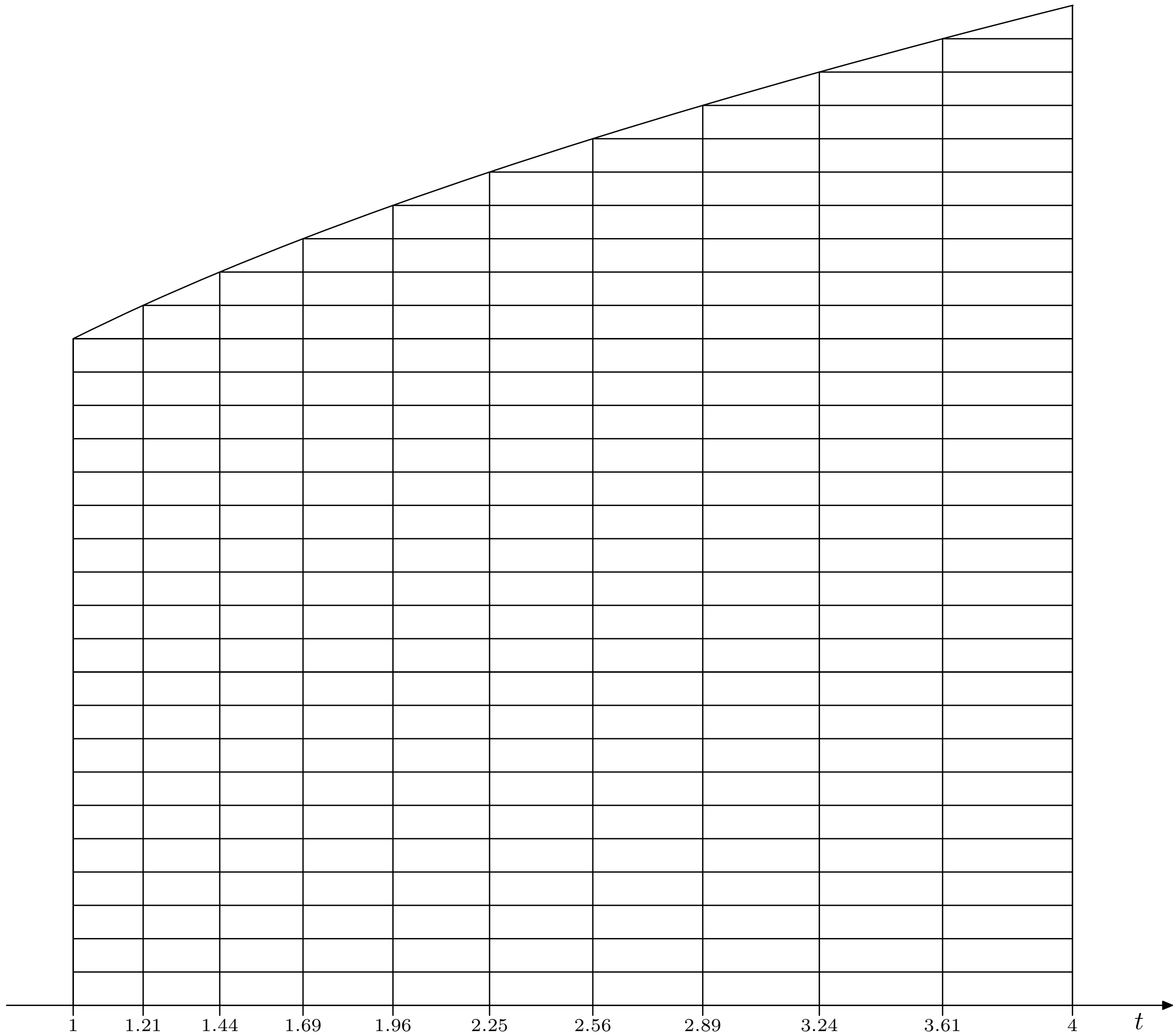


rys. 16

[92] Całkowanie przez podstawienie nazywa się też zmianą zmiennej całkowania.

[93] Rezygnując przy tym z koloru zielonego, bez którego kratki są bardziej czytelne.

Po rozciągnięciu tak pokratkowanej figury, otrzymamy obrazek pokazany na rysunku 17.

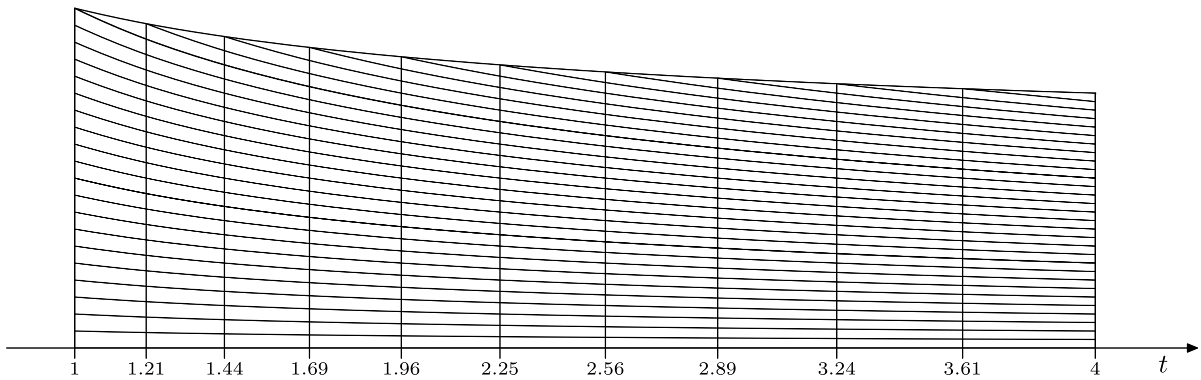


rys. 17

Widać gołym okiem, że zdeformowane kratki wcale nie mają pola 1/100, a jak popatrzymy uważnie na skalę na osi t, to zobaczymy, że w pierwszej kolumnie od lewej pole kratek zwiększyło się o czynnik 2.1, natomiast w prawej (czyli ostatniej) kolumnie o czynnik 3.9.

Wyobraźmy sobie teraz, że elastyczna błona, na której narysowany jest pokratkowany obszar, ma magiczną własność: Pozwala nam się dowolnie deformować w poziomie, ale przy każdej deformacji zachowuje pole powierzchni – po prostu rozciąganie w poziomie jest rekompensowane automatycznym kurczeniem się magicznej błony w pionie.

Obszar narysowany na takiej błonie po rozciągnięciu nie przybrałby kształtu jak na rysunku 17, ale skurczyłby się w pionie i wyglądałby tak jak na rysunku 18, gdzie każdy czworokącik krzywoliniowy ma pole 1/100 – identyczne jak przed deformacją.



rys. 18

Ponieważ w poziomie rozciąganie było o czynnik $2x=2\sqrt{t}$, o dokładnie taki czynnik obszar kurczy się w pionie prowadząc do prawdziwego wzoru

$$\int_1^2 x+1\,dx=\int_1^4 \sqrt{t}+1\,\frac{dt}{2\sqrt{t}}\,.$$

Podsumowując: Zmiana zmiennej całkowania w całce oznaczonej polega na zastosowaniu monotonicznego przekształcenia do przedziału całkowania. To wymaga:
• odpowiedniej zmiany granic całkowania,
• przeliczenia funkcji podcałkowej na nową zmienną.

Ponadto musimy zrekompensować rozciąganie w poziomie obszaru, którego polem[94] jest całka oznaczona. Temu służy formalne przeliczenie różniczki jednej zmiennej na różniczkę drugiej zmiennej, czyli w naszym przykładzie dx na dt zgodnie z formalną formułką $dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.

[94]Mówienie o polu ma sens, gdy funkcja podcałkowa jest nieujemna. W przypadku funkcji przyjmującej także wartości ujemne, opis wymagałby uwzględnienia, z jakim znakiem geometryczne pole jest liczone do całki.