Pola figur i całka oznaczona.

Na początek parę słów o tym, czym jest pole figury[60] na płaszczyźnie. Czym jest pole? To pytanie składa się z dwóch części. Część pierwsza, to pytanie o to, kiedy możemy sensownie mówić o polu figury. A pytanie drugie, to w przypadku figury, która ma pole, pytanie o wartość liczbową tego pola.

Nie będę tu wprowadzał żadnej systematycznej teorii[61], a jedynie przytoczę wybrane fragmenty takiej teorii, potrzebne do zrozumienia w zarysie, o co chodzi w definiowaniu pola figur.

Jako punkt wyjścia sformułujmy następujące bezdyskusyjne warunki, jakich oczekujemy od pól figur:

• Jeżeli $A \subset B$, to pole figury A jest nie większe od pola figury B, czyli większa figura ma większe pole, ewentualnie ich pola są równe.

• Umiemy wyliczyć pola figur wielokątnych[62]. Figury te będą szablonami o znanych polach, do których to szablonów będziemy porównywać inne figury. Każda figura wielokątna daje się podzielić na trójkąty[63], a pola trójkątów umiemy obliczać. Nic złego by się nie stało, gdybyśmy ograniczyli się do figur prostokątnych, czyli o strukturze opartej na wielokątach o kątach prostych[64]. Tak czy owak, powinniśmy mieć wystaczające bogactwo dostępnych szablonów, aby dowolnie dokładnie dopasować się nimi do dowolnego, być może dość kapryśnego, kształtu mierzonej figury.

Jeden sposób zmierzenia pola figury przy użyciu dostępnych szablonów[65] jest następujący:
Rozważamy szablony zawarte w danej figurze. Czymkolwiek by nie było pole danej figury, musi być ono większe bądź równe od pola dowolnego szablonu w niej zawartego, a w konsekwencji od kresu górnego zbioru pól wszystkich szablonów zawartych w danej figurze. A tak naprawdę, to chciałoby się powiedzieć, że ów kres górny po prostu jest polem figury[66], bo nie jesteśmy w stanie lepiej zmierzyć pola figury przymierzając od wewnątrz wszystkie możliwe szablony.

Drugi sposób zmierzenia pola figury jest analogiczny:
Rozważamy szablony zawierające daną figurę. Pole danej figury musi być mniejsze bądź równe od pola dowolnego szablonu ją zawierającego, a w konsekwencji od kresu dolnego

[60] Przez figurę będę tu rozumiał każdy ograniczony podzbiór płaszczyzny. Ograniczony, to znaczy zawarty w pewnym kole. Lub w pewnym kwadracie, jak kto woli. A miłośnicy fantazyjnych definicji mogą sobie zdefiniować zbiór ograniczony jak taki, który jest zawarty w pewnym siedemnastokącie foremnym.

[61] Pełna teoria pozwalająca na wprowadzenie różnych wariantów definicji pola i innych tego typu funkcji przypisujących liczby niektórym zbiorom, jest zwana teorią miary.

[62] Celowo unikam użycia tu słowa "wielokąt", bo chodzi mi o figury, które nie muszą być wielokątami w ścisłym sensie. Dopuszczam tu figury, które są sumami kilku wielokątów lub wielokątami z wielokątną dziurą, a także dopuszczam zbiór pusty. Przy wielokątach możemy zastosować umowę, że brzeg wielokąta także jest częścią wielokąta.

[63] Podział figury na trójkąty nazywamy triangulacją.

[64] Czyli o kątach wewnętrznych 90° oraz 270°.

[65] Czyli w naszym przypadku figur o kształcie wielokątnym.

[66] W teorii miary liczbę tę nazywamy miarą wewnętrzną figury.

zbioru pól wszystkich szablonów zawierających daną figurę. Chciałoby się powiedzieć, że ów kres dolny jest polem figury[67], bo nie jesteśmy w stanie lepiej zmierzyć pola figury przymierzając od zewnątrz wszystkie możliwe szablony.

Oczekujemy, że miara wewnętrzna jest równa mierze zewnętrznej i to jest właśnie pole figury. Często tak właśnie bywa, ale nie zawsze. Jeśli w istocie miary te są równe, to powiemy, że figura jest mierzalna, a wspólna wartość miar wewnętrznej i zewnętrznej jest polem figury. Gdy jednak miary te są różne, to mówimy, że figura jest niemierzalna i w związku z tym nie definiujemy jej pola.

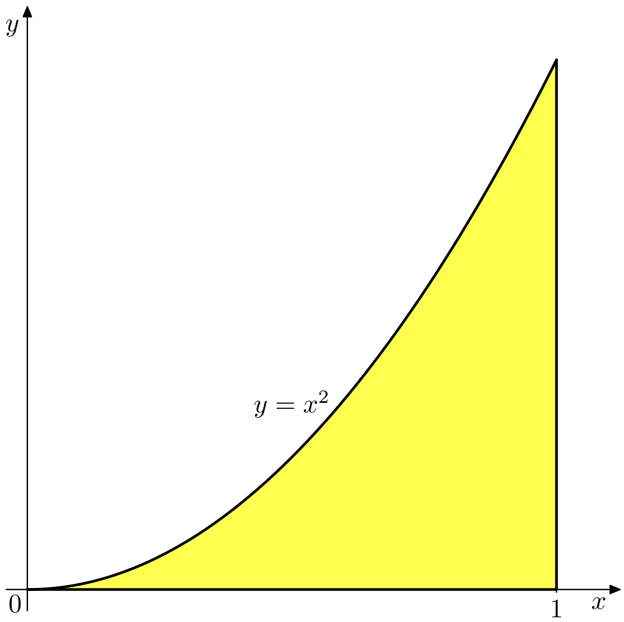
Przykładem figury niemierzalnej[68] jest tzw. kwadrat sito będący zbiorem

$$\{(x,y): x,y\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\}\ ,$$

czyli kwadrat jednostkowy, w którym uwzględniamy tylko punkty o obu współrzędnych wymiernych. Miara wewnętrzna kwadratu sito jest równa 0, a miara zewnętrzna jest równa 1.

Nas będzie interesować sytuacja, gdy figura ma dobrze zdefiniowane pole, a ponadto będą nas interesować figury bardzo specjalnej postaci. Ale zanim przejdziemy do ogólnych rozważań, przyjrzyjmy się bardzo konkretnemu przykładowi.

Przykład 41:
Obliczyć pole trójkąta krzywoliniowego ograniczonego odcinkami prostych o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz fragmentem paraboli o równaniu $y=x^2$, przedstawionego na rysunku 1.

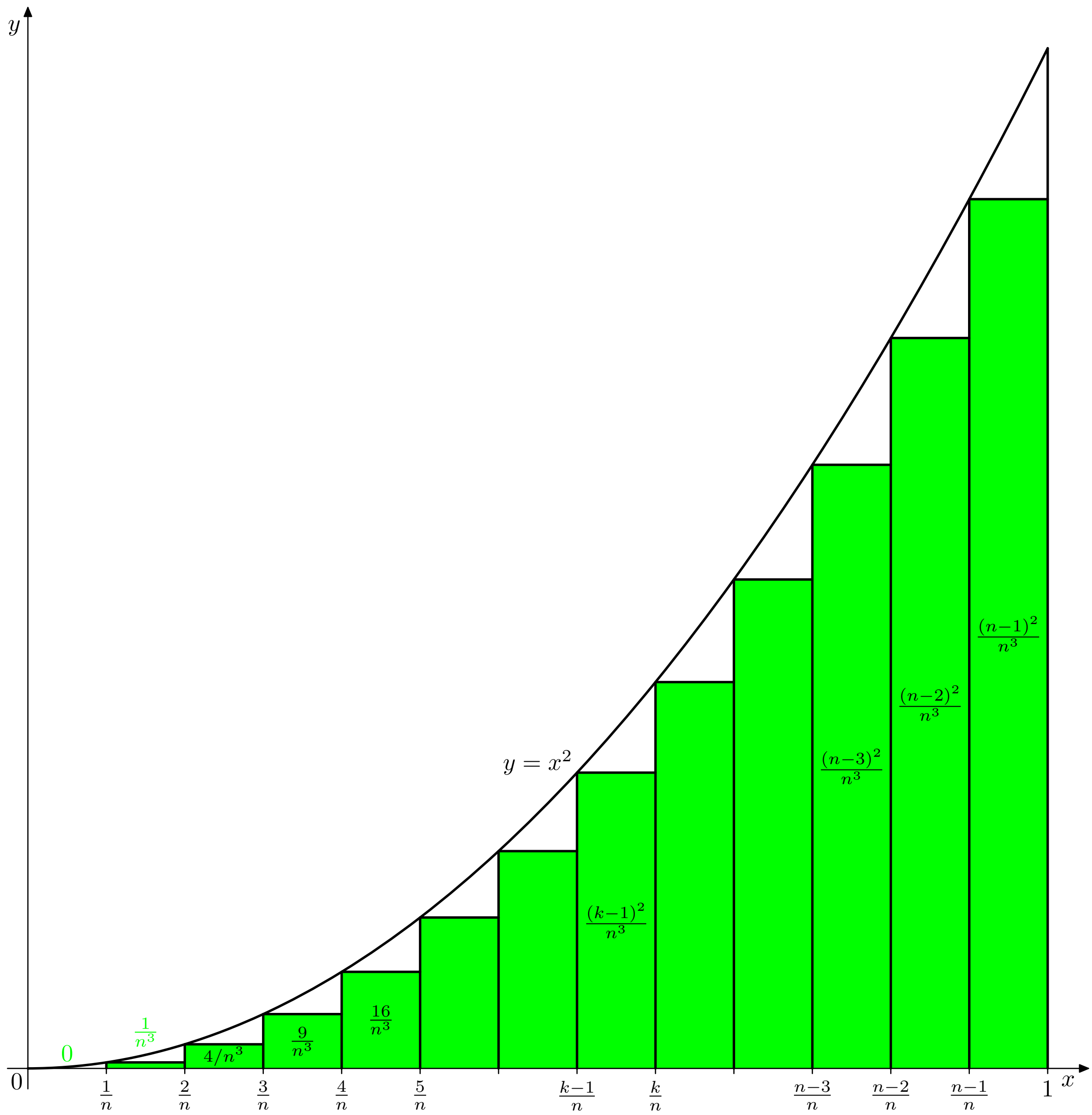


rys. 1

[67]W teorii miary liczbę tę nazywamy miarą zewnętrzną figury.

[68]Cały czas mówię o tak zwanej mierze Jordana, a więc kwadrat sito jest niemierzalny w sensie Jordana. Jest on natomiast mierzalny w sensie Lebesgue'a – miara Lebesgue'a jest bardziej subtelna i mierzy o wiele więcej kaprzyśnych zbiorów. Miara Lebesgue'a kwadratu sito jest równa 0. Ale miara Lebesgue'a również nie jest idealna, bo można wykazać istnienie zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a. Osoby, które w przyszłości zgłębią teorię miary i poznają definicję miary, przekonają się, że miara Lebesgue'a jest miarą, a miara Jordana nie jest miarą. A to dlatego, że miara musi być przeliczalnie addytywna, a miara Jordana jest tylko skończenie addytywna. Nie pytaj teraz o więcej szczegółów, może kiedyś się tego wszystkiego dokładnie nauczysz.

Rozwiązanie:
Podzielmy przedział [0, 1] na n równych przedziałów i wybudujmy na każdym przedziale najwyższy prostokąt, jaki zmieści się w rozważanym trójkącie krzywoliniowym. Powstanie wówczas figura złożona z prostokątów przedstawiona na rysunku 2.



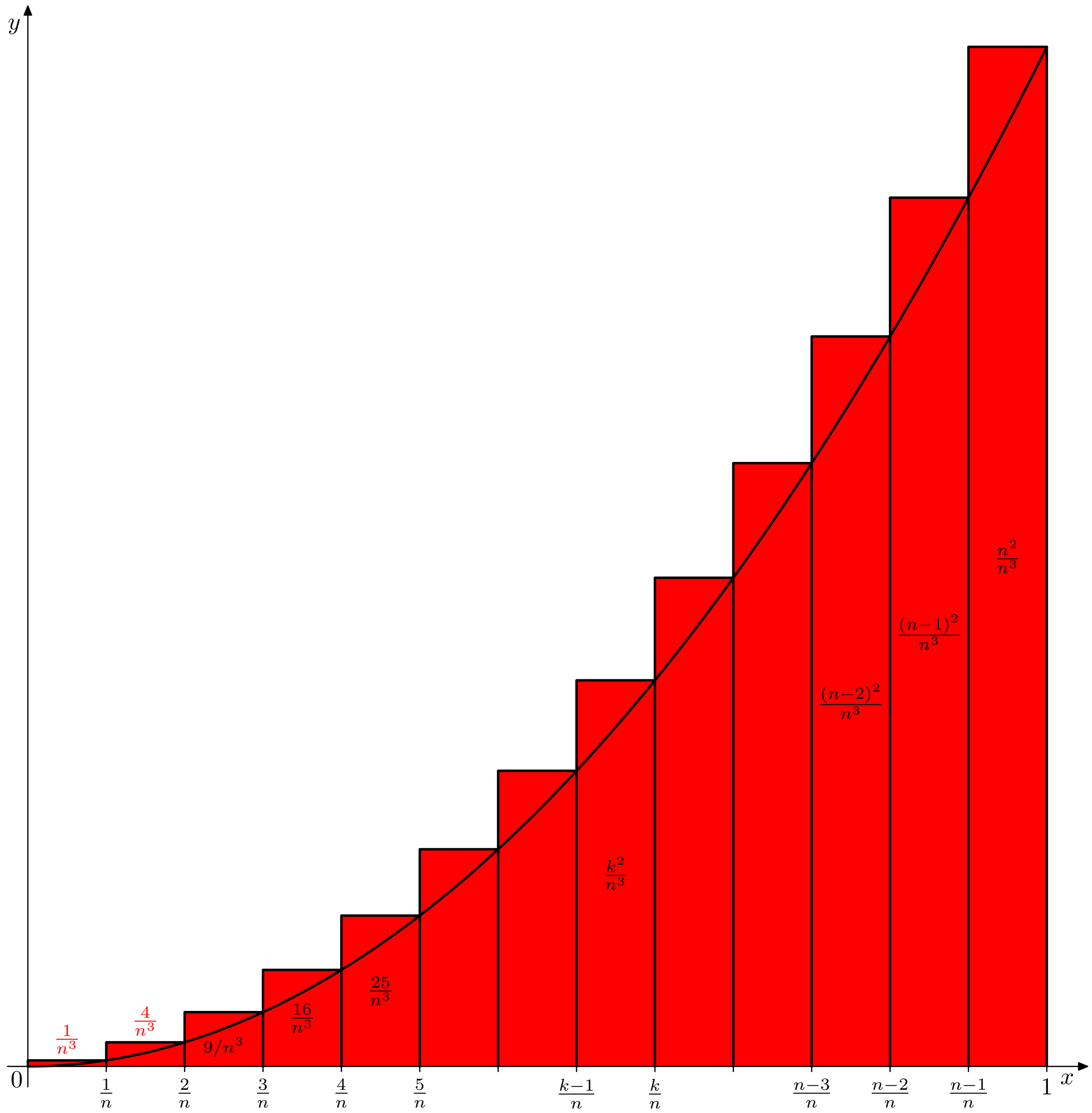
rys. 2

Pole zielonej figury jest sumą pól prostokątów[69] ją tworzących i wynosi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \nearrow \frac{1}{3}\,.$$

[69]Odnotujmy, że pierwszy prostokąt ma zerową wysokość i degeneruje się do odcinka.

Analogicznie wybudujmy na każdym przedziale podziału najniższy prostokąt, jaki pokryje odpowiedni fragment rozważanego trójkąta krzywoliniowego. Powstała figura jest przedstawiona na rysunku 3.



rys. 3

Pole czerwonej figury jest sumą pól prostokątów ją tworzących i wynosi

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\searrow\frac{1}{3}\,.$$

Ponieważ uzyskaliśmy ciąg figur zawartych w trójkącie krzywoliniowym, o polach dążacych do $1/3$ oraz ciąg figur zawierających ten trójkąt, polach dążacych do $1/3$, wnioskujemy stąd, że pole rozważanego trójkąta krzywoliniowego jest równe $1/3$.

Przejdźmy teraz do pojęcia całki oznaczonej. Pojęcie to ma dwa oblicza, które kiedyś tam się spotykają, ale początkowo idą zupełnie niezależnie od siebie. Oblicze pierwsze, którego skromny przedsmak poznaliśmy w ostatnim przykładzie, to grzebanie się w podziałach przedziału i polach figur złożonych z prostokątów. Jest ono dość techniczne, więc kontynuowanie tego wątku odłożymy na później. Zajmiemy się natomiast obliczem drugim, które związane jest z polami figur płaskich.

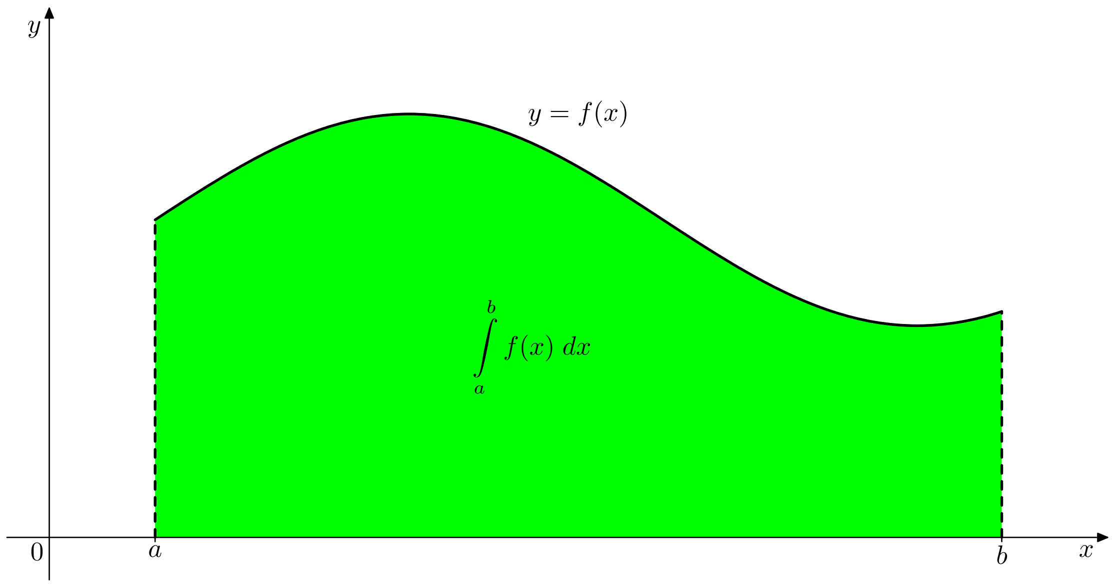
Niezależnie od tego, którym obliczem całki oznaczonej się zajmujemy, powiedzieć sobie trzeba najpierw, czymże ta całka w ogóle jest.

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją. Załóżmy, że ciągłą, chociaż z tej ciągłości zrezygnujemy w przyszłości[70]. I do tego niech f będzie funkcją o wartościach dodatnich, chociaż z tego założenia zrezygnujemy jeszcze szybciej.

Interesuje nas pole obszaru[71]:

$$\{(x,y):\ x\in[a,b]\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

zamalowanego na zielono na rysunku 4.



rys. 4

Figura ta zależy od liczb a i b oraz funkcji f, więc jakkolwiek chcielibyśmy oznaczyć jej pole powierzchni, oznaczenie to musi zawierać w sobie jakoś wkomponowane te trzy elementy. Przyjmujemy oznaczenie

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

które z tajemniczych (na razie) powodów jest podobne do całki nieoznaczonej i w ogóle nie wiedzieć czemu nazywa się całką. W oznaczeniu tym występuje także zmienna x,

[70]Rym niezamierzony i niepotrzebny, ale nie będę się gimnastykował z takim układaniem tego zdania, aby rymu nie było.

[71]W skrócie mówi się o obszarze pod wykresem funkcji f na przedziale $[a,b]$.

która jest zmienną związaną[72], może być więc zamieniona na prawie każdą inną literkę bez zmiany znaczenia całego wyrażenia. Na przykład możemy równie dobrze napisać:

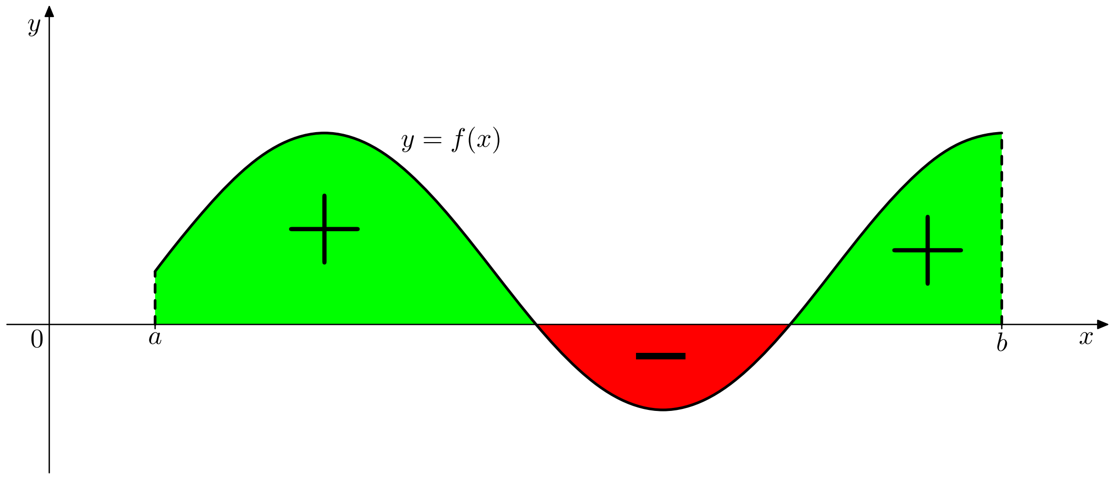
$$\int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Założenie dodatniości funkcji f jest potrzebne tylko po to, aby zrobić ładniejszy rysunek i mówić o czystym polu geometrycznym. Ale jeśli funkcja f bywa ujemna, jak na przykład na rysunku 5, to $\int_a^b f(x)\,dx$ oznaczać będzie algebraiczną sumę pól:

• pole zamalowane na zielono, leżące pod wykresem[73] funkcji i jednocześnie nad osią OX, uwzględniamy normalnie,

• pole zamalowane na czerwono, leżące **nad** wykresem[74] funkcji i jednocześnie **pod** osią OX, uwzględniamy z przeciwnym znakiem.

Całka oznaczona jest więc równa polu zielonemu minus pole czerwone.



rys. 5

[72]Czym są zmienne wolne i zmienne związane, wyjaśniać tu nie będę, przyjmując, że jest to przedmiotem *Wstępu do Matematyki.*

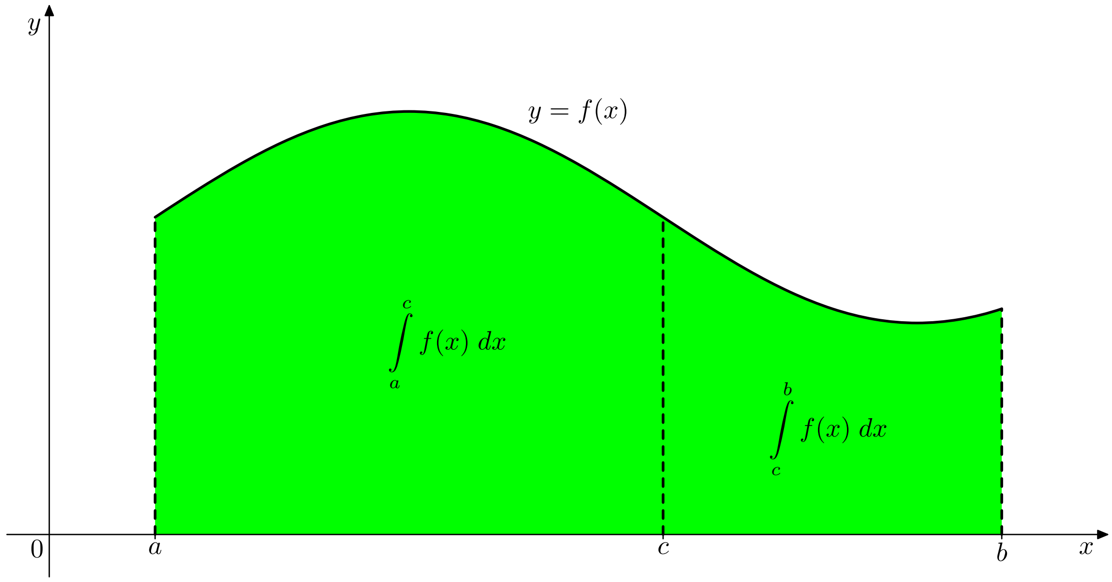
[73]Tam funkcja f jest dodatnia.

[74]Tam funkcja f jest ujemna.

Pierwszą własnością całki oznaczonej, którą chcę tu przytoczyć, jest równość

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

która zachodzi dla każdego $c\in(a,b)$. Równość ta jest oczywista[75], jeśli spojrzymy uważnie na rysunek 6.

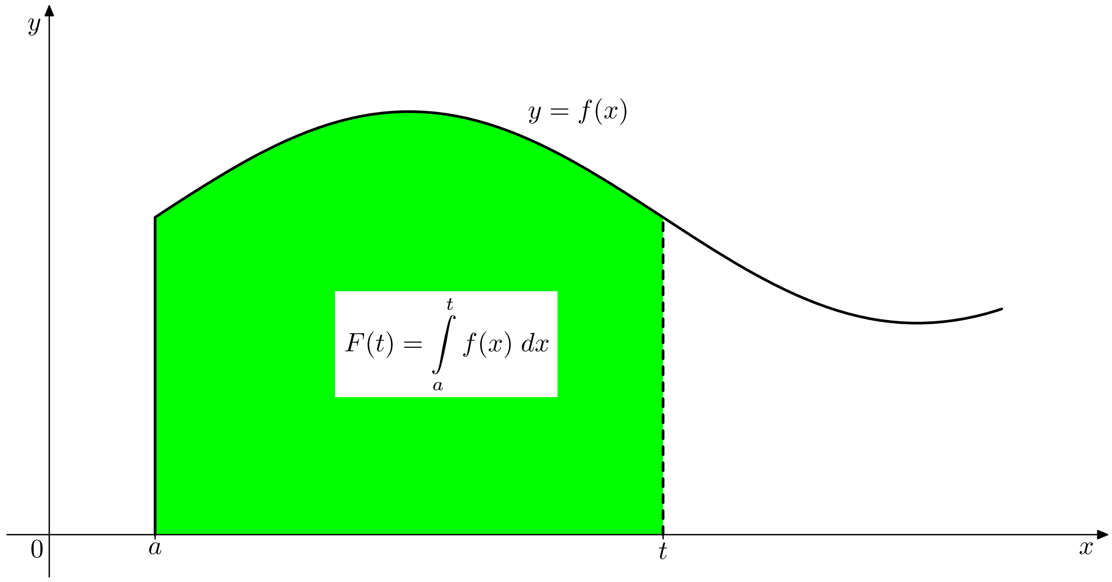


rys. 6

[75]Tego, że jak rozetniemy figurę na dwa kawałki, to suma pól kawałków jest równa polu całej figury, tłumaczyć chyba nie trzeba.

Ustalmy teraz lewy koniec przedziału, niech to będzie jak dotychczas a, natomiast zmieniajmy[76] koniec prawy, oznaczając go literką t, co lepiej kojarzy się z wielkością zmienną. Oznaczmy dla krótkości pole odpowiedniej figury (rys. 7), czyli całkę oznaczoną, przez $F(t)$. W tej sposób otrzymujemy jakąś funkcję F. Póki co, nie za wiele o niej wiemy, nie wiemy na przykład czy jest ciągła.

Ale co tam ciągłość. Wykażemy więcej, a mianowicie udowodnimy, że funkcja F jest różniczkowalna[77]. Mało tego, jej pochodna F' jest nie byle czym.



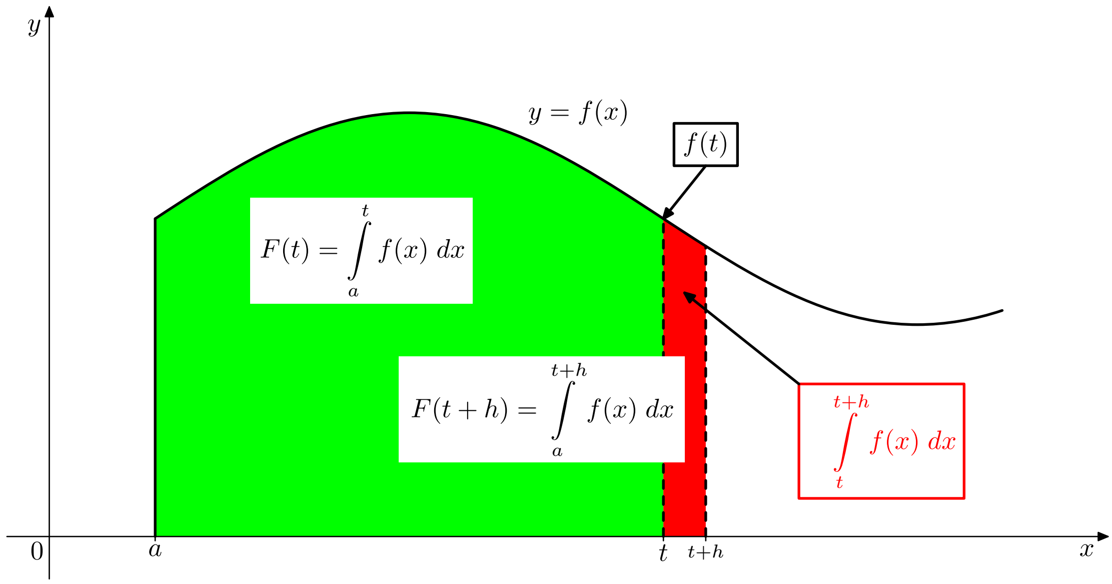
rys. 7

[76]W sensownym zakresie.

[77]Mam nadzieję, że wszyscy pamiętają, iż funkcja różniczkowalna jest ciągła, a więc różniczkowalność jest warunkiem mocniejszym niż sama tylko ciągłość.

Z definicji pochodnej otrzymujemy[78] (zobacz rys. 8):

$$F'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int\limits_t^{t+h} f(x)\,dx}{h}\,.$$



rys. 8

W liczniku ostatniego wyrażenia występuje całka, która wyraża pole zamalowane na rysunku 8 na czerwono. Jest to pole trapezu[79] krzywoliniowego, który z dobrym przybliżeniem jest prostokątem o boku poziomym długości h i boku pionowym długości $f(t)$, a więc polu w przybliżeniu równym $h\cdot f(t)$, przy czym (z uwagi na ciągłość funkcji f) przybliżenie to jest świetne, jeśli h bardzo bliskie 0.

W ten sposób dochodzimy[80] do

$$F'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\int\limits_t^{t+h} f(x)\,dx}{h}=f(t)\,,$$

co oznacza, że ...

... funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f.

Ale którą pierwotną? Bo przecież funkcji pierwotnych jest dużo. Ano tą, dla której $F(a)=0$, albowiem przy $t=a$ rozważana przez nas figura degeneruje się do pionowego odcinka, którego pole jest równe 0.

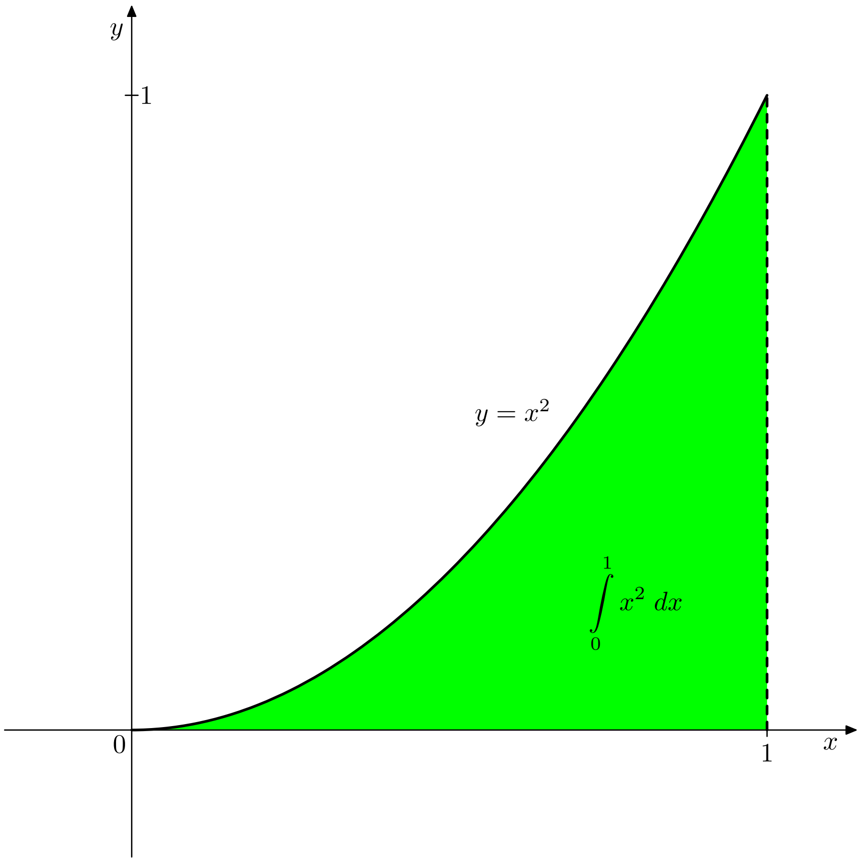
---

[78]Rysunek i rachunki zrobione są przy nieistotnym założeniu, że $h>0$. Przypadek $h<0$ wymagałby zobienia podobnego rysunku i przeprowadzenia analogicznych rachunków.

[79]Trapez widzi każdy, kto zapatrzy się na dwa pionowe równoległe boki. Można też zobaczyć prostokąt, tylko krzywo ucięty na górze.

[80]Dla precyzyjnego dowodu trzeba sie pobawić definicją Cauchy'ego ciągłości funkcji f w punkcie t. Zainteresowanych odsyłam do podręcznika prof. Marcinkowskiej, strona 408 i kawałek następnej – Twierdzenie 6 wraz z dowodem.

W przykładzie 41 pracowicie[81] wyliczyliśmy, że pole trójkąta krzywoliniowego (rys. 9) ograniczonego osią OX, prostą o równaniu $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ jest równe 1/3.



rys. 9

[81] Licząc pola odpowiednich figur złożonych z prostokątów i przechodząc do granicy.

To samo można osiągnąć wprowadzając funkcję F opisaną na rysunku 10.

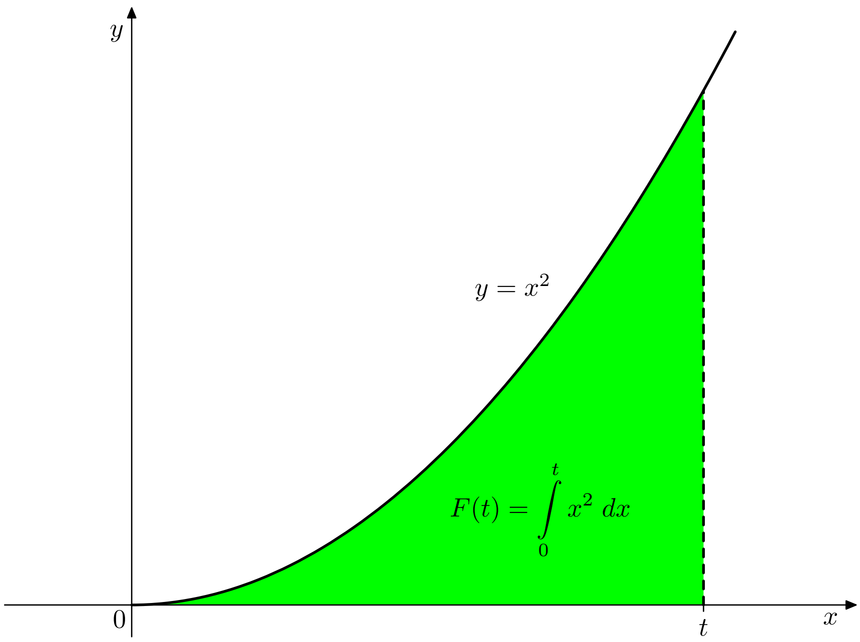
Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji określonej wzorem x^2, a ponadto $F(0)=0$. Skoro $F'(x)=x^2$, to[82]

$$F(x)=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C\,,$$

a skoro $F(0)=0$, to $C=0$, wobec czego

$$F(x)=\frac{x^3}{3}\,.$$

W konsekwencji pole trójkąta krzywoliniowego z rysunku 9 jest równe $F(1)=1/3$.



rys. 10

[82]Pozwalamy sobie na pewną drobną nieścisłość stawiając znak równości między całką nieoznaczoną (czyli zbiorem wszystkich funkcji pierwotnych zapisywanym jako ogólna postać funkcji pierwotnej), a funkcją F, która jest jedną szczególną funkcją pierwotną.

Wiemy już, że dla funkcji ciągłej $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funkcja F określona wzorem

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$$

jest taką funkcją pierwotną funkcji f, że $F(a)=0$. Jeśli ktoś chce zwracać uwagę na formalne detale, to dodać należy, że F jest określona na przedziale $[a,b]$, a jej pochodną w punktach a i b zastępują odpowiednie pochodne jednostronne[83].

To prowadzi do następującej procedury obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x)\,dx$:

1° Oblicz całkę nieoznaczoną $\int f(x)\,dx$.
2° Dobierz tak stałą całkowania, aby otrzymać taką funkcję pierwotną funkcji f, niech ta funkcja pierwotna nazywa się F, że $F(a)=0$.
3° Oblicz $F(b)$. To jest właśnie szukana całka $\int_a^b f(x)\,dx$.

Przykład 42:
Obliczyć $\int_1^2 x^2\,dx$.
Rozwiązanie:
Stosując opisaną wyżej procedurę, postępujemy następująco:
1° Obliczamy całkę nieoznaczoną $\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$.
2° Dobieramy stałą całkowania $C=-1/3$. W konsekwencji $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}$ oraz $F(1)=0$.
3° Obliczamy $F(2)=\frac{7}{3}$. Wobec tego

$$\int_1^2 x^2\,dx=\frac{7}{3}\,.$$

Ufff... Wyszło, chociaż może najwygodniejsze te rachunki nie były. Pierwsza refleksja jest taka, że gdybyśmy inaczej wybrali stałą całkowania, nie wpłynęło by to na wartość różnicy $F(b)-F(a)$, czyli przyrostu funkcji F na przedziale $[a,b]$. To prowadzi do nieco prostszej procedury:

Nieco uproszczona procedura obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x)\,dx$:

1° Oblicz całkę nieoznaczoną $\int f(x)\,dx$.
2° Dobierz jakkolwiek stałą całkowania, aby otrzymać jakąkolwiek funkcję pierwotną funkcji f, niech ta funkcja pierwotna nazywa się F.
3° Oblicz $F(b)-F(a)$. To jest właśnie szukana całka $\int_a^b f(x)\,dx$.

[83]Na ogół funkcja f jest określona na przedziale większym niż $[a,b]$ i w konsekwencji funkcja F ma w punktach a i b całkowicie legalną obustronną pochodną, nie tylko jednostronną namiastkę pochodnej.

W naszym przykładzie:

1° Obliczamy całkę nieoznaczoną $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$.

2° Dobieramy stałą całkowania $C=0$, bo tak jest najprościej. W konsekwencji $F(x)=\frac{x^3}{3}$.

3° Obliczamy $F(2)-F(1)=\frac{7}{3}$.

Odrobinę prościej, ale zapis dość niewygodny. A oto jak te rachunki będziemy zapisywać w przyszłości.

Ogólnie:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b} = F(b)-F(a)\,.$$

W naszym przykładzie:

$$\int\limits_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{2} = \frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}\,.$$

Pionowa kreska po wyrażeniu oznacza, że nie interesuje nas to wyrażenie, ale jego przyrost w podanych granicach. Zwróć uwagę, że w powyższych wzorach mamy równości między liczbami.

Terminologia: W całce oznaczonej $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ funkcję f nazywamy funkcją podcałkową, a przedział $[a,\,b]$ przedziałem całkowania. Liczby a i b nazywamy granicami całkowania, odpowiednio dolną i górną.

Z własności całki nieoznaczonej oraz z wcześniejszych rozważań wynikają następujące wzory:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

$$\int\limits_a^b f(x)\pm g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

$$\int\limits_a^b r\cdot f(x)\,dx = r\cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Jeżeli $a<b$ oraz dla każdego $x\in[a,\,b]$ zachodzi nierówność $f(x)\leqslant g(x)$, to:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$$