Całka nieoznaczona – różne przykłady.

Przykład 35:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}\,.$$

Rozwiązanie:
Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}=\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x^3\cdot(x+1)^2}}=\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}$$

i wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}}\,,$$

czyli

$$t^5=1+\frac{1}{x}\,,$$

$$t^5-1=\frac{1}{x}$$

oraz formalnie

$$5t^4\,dt=-\frac{dx}{x^2}\,.$$

Otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}=-\int \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}\cdot\frac{-dx}{x^2}=-\int\frac{1}{t^2}\cdot 5t^4\,dt=-5\cdot\int t^2\,dt=-\frac{5\cdot t^3}{3}+C=$$

$$=-\frac{5}{3}\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}}\right)^3+C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}=-\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3/5}+C\,.$$

Przykład 36:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\sqrt{e^x-1}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt{e^x-1}$, czyli $t^2=e^x-1$ i formalnie $2t\,dt=e^x\,dx$, otrzymujemy

$$\int\sqrt{e^x-1}\,dx=\int\frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x}\cdot e^x\,dx=\int\frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,dt=2\cdot\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt=2\cdot\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=2\cdot\int 1\,dt-2\cdot\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=2\cdot t-2\cdot\operatorname{arctg} t+C=2\cdot\sqrt{e^x-1}-2\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C\,.$$

Przykład 37:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$I(x) = \int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x}\, dx\,.$$

Sprawdzić, że $I(e) = I(1) + 2$, a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.

Rozwiązanie:
Wykonujemy podstawienie $t = \sqrt{\ln x}$, czyli $x = e^{t^2}$ i formalnie $dx = e^{t^2} \cdot 2t\, dt$, a następnie całkujemy przez części:

$$I(x) = \int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x}\, dx = \int \frac{e^t}{e^{t^2}} \cdot e^{t^2} \cdot 2t\, dt = 2\int t \cdot e^t\, dt = 2t \cdot e^t - 2\int e^t\, dt = 2t \cdot e^t - 2e^t + C =$$

$$= 2\sqrt{\ln x} \cdot e^{\sqrt{\ln x}} - 2e^{\sqrt{\ln x}} + C\,.$$

Sprawdzenie:

$$I(1) = -2 + C\,,$$

$$I(e) = C = -2 + 2 + C = I(1) + 2\,.$$

Przykład 38:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^x \cdot \sin\sqrt{e^x + 1}\, dx\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t = \sqrt{e^x + 1}$, czyli $t^2 = e^x + 1$ i formalnie $2t\, dt = e^x\, dx$, a następnie całkując przez części, otrzymujemy

$$\int e^x \cdot \sin\sqrt{e^x + 1}\, dx = \int \sin t \cdot 2t\, dt = 2 \cdot \int t \cdot \sin t\, dt = 2 \cdot t \cdot (-\cos t) - 2 \cdot \int 1 \cdot (-\cos t)\, dt =$$

$$= -2 \cdot t \cdot \cos t + 2 \cdot \int \cos t\, dt = -2 \cdot t \cdot \cos t + 2 \cdot \sin t + C =$$

$$= -2 \cdot \sqrt{e^x + 1} \cdot \cos\sqrt{e^x + 1} + 2 \cdot \sin\sqrt{e^x + 1} + C\,.$$

Przykład 39:
Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{los} x = \operatorname{nos} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{nos} x = \operatorname{sos} x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sos} x = \operatorname{los} x\,.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \operatorname{los}^2 x\, dx$$

wyrażając wynik przy pomocy funkcji los, nos i sos.

Rozwiązanie:
Oznaczmy obliczaną całkę przez $I(x)$ i wykonajmy trzykrotnie całkowanie przez części. Otrzymujemy:

$$I(x) = \int \operatorname{los}^2 x\, dx = \int \operatorname{los} x \cdot \operatorname{los} x\, dx = \operatorname{sos} x \cdot \operatorname{los} x - \int \operatorname{sos} x \cdot \operatorname{nos} x\, dx =$$

$$=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}x\cdot\operatorname{nos}x+\int\operatorname{nos}x\cdot\operatorname{sos}x\,dx=$$

$$=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}^2x+\operatorname{los}x\cdot\operatorname{sos}x-\int\operatorname{los}x\cdot\operatorname{los}x\,dx=2\cdot\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}^2x-I(x)\,.$$

Dostaliśmy więc równanie

$$I(x)=2\cdot\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}^2x-I(x)\,,$$

czyli

$$2\cdot I(x)=2\cdot\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}^2x+C_1\,,$$

skąd otrzymujemy rozwiązanie zadania

$$\int\operatorname{los}^2x\,dx=I(x)=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\frac{\operatorname{nos}^2x}{2}+C\,.$$

Uwaga:

Można było zakończyć rachunki po jednokrotnym całkowaniu przez części, jeśli zauważymy, że funkcja podcałkowa jest iloczynem pewnej funkcji i jej pochodnej:

$$\int\operatorname{los}^2x\,dx=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\int\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{nos}x\,dx=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\int\operatorname{nos}'x\cdot\operatorname{nos}x\,dx=$$

$$=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\frac{\operatorname{nos}^2x}{2}+C\,.$$

Przykład 40:

Wyrazić całkę nieoznaczoną

$$I_n(x)=\int x^n\cdot\sin\sqrt{x}\,dx$$

za pomocą $I_{n-1}(x)$.

Rozwiązanie:

Przyjęcie we wzorach

$$\int f'(x)\cdot\sin f(x)\,dx=-\cos f(x)+C$$

oraz

$$\int f'(x)\cdot\cos f(x)\,dx=\sin f(x)+C$$

funkcji $f(x)=\sqrt{x}$ prowadzi odpowiednio do

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=-\cos\sqrt{x}+C$$

oraz

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=\sin\sqrt{x}+C\,.$$

W oparciu o powyższe wzory wykonujemy dwukrotnie całkowanie przez części (różniczkując pierwszy czynnik i całkując drugi):

$$I_n(x)=\int x^n\cdot\sin\sqrt{x}\,dx=2\cdot\int x^{n+1/2}\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=2\cdot x^{n+1/2}\cdot\left(-\cos\sqrt{x}\right)-2\cdot\int\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x^{n-1/2}\cdot\left(-\cos\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+(2n+1)\cdot\int x^{n-1/2}\cdot\cos\sqrt{x}\,dx=$$

$$=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot\int x^{n}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot x^{n}\cdot\sin\sqrt{x}-2\cdot(2n+1)\cdot\int n\cdot x^{n-1}\cdot\sin\sqrt{x}\,dx=$$

$$=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot x^{n}\cdot\sin\sqrt{x}-2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x)\,.$$

Odpowiedź:

$$I_n(x)=-2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot x^{n}\cdot\sin\sqrt{x}-2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x)=$$
$$=-2\cdot x^{n}\cdot\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}+2\cdot(2n+1)\cdot x^{n}\cdot\sin\sqrt{x}-2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x)\,.$$