Sprowadzanie całek do całek z funkcji wymiernych.

Poniżej $R(x,y)$ oznacza funkcję wymierną dwóch zmiennych[52].

Przykład 29:
Sprowadzić całkę

$$\int R\left(x, \sqrt{x+a}\right) dx$$

do całki z funkcji wymiernej.
Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt{x+a}$, czyli[53] $x=t^2-a$ i formalnie $dx=2t\,dt$, otrzymujemy

$$\int R\left(x, \sqrt{x+a}\right) dx = \int R\left(t^2-a, t\right) \cdot 2t\,dt\,.$$

Zauważmy, że jeśli R jest wielomianem, to daną całkę sprowadziliśmy do całki z wielomianu.

Przykład 30:
Sprowadzić całkę

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x+a}\right) dx$$

do całki z funkcji wymiernej.
Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt[n]{x+a}$, czyli[54] $x=t^n-a$ i formalnie $dx=nt^{n-1}\,dt$, otrzymujemy

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x+a}\right) dx = \int R(t^n-a, t) \cdot nt^{n-1}\,dt\,.$$

Zauważmy, że jeśli R jest wielomianem, to daną całkę sprowadziliśmy do całki z wielomianu.

Przykład 31:
Sprowadzić całkę

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{a+\sqrt[m]{b+\sqrt[k]{c+x}}}\right) dx$$

do całki z funkcji wymiernej.
Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt[n]{a+\sqrt[m]{b+\sqrt[k]{c+x}}}$, czyli[55] kolejno

$$\sqrt[m]{b+\sqrt[k]{c+x}} = t^n-a\,,$$
$$\sqrt[k]{c+x} = (t^n-a)^m-b\,,$$
$$x = ((t^n-a)^m-b)^k-c\,,$$

[52] Czyli iloraz dwóch wielomianów dwóch zmiennych. W razie potrzeby $R(x)$ będzie funkcją wymierną jednej zmiennej.

[53] Przy dodatkowym założeniu $t \geqslant 0$.

[54] W przypadku parzystego n powinniśmy tu dodać dodatkowe założenie $t \geqslant 0$.

[55] Tym razem pominę formułowanie dodatkowego założenia o t, gdyż wymagałoby to grzebania się w parzystościach n, m, k i wynikających z tego nierównościach.

i formalnie

$$dx = W(t)\, dt\,,$$

gdzie $W(t)$ jest wielomianem będącym pochodną wielomianu $((t^n-a)^m-b)^k-c$, otrzymujemy

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{a+\sqrt[m]{b+\sqrt[k]{c+x}}}\right) dx = \int R\Big(((t^n-a)^m-b)^k-c,\, t\Big)\cdot W(t)\, dt\,.$$

Zauważmy, że jeśli R jest wielomianem, to daną całkę sprowadziliśmy do całki z wielomianu.

Przykład 32:
Sprowadzić całkę

$$\int R\left(x, \sqrt{(x-a)\cdot(x-b)}\right) dx\,,$$

gdzie $a \neq b$, do całki z funkcji wymiernej.

Rozwiązanie:
Wbrew pozorom podstawienie za $\sqrt{(x-a)\cdot(x-b)}$ nowej zmiennej nie przyniesie niczego dobrego. Problemem jest wielomian kwadratowy występujący pod pierwiastkiem. Okazuje się jednak, że można za nową zmienną podstawić iloraz funkcji liniowych pod pierwiastkiem. Otrzymujemy wówczas kolejno[56]

$$t = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\,,$$

$$t^2 = \frac{x-a}{x-b}\,,$$

$$t^2 = \frac{x-b+(b-a)}{x-b}\,,$$

$$t^2 = 1 + \frac{b-a}{x-b}\,,$$

$$t^2 - 1 = \frac{b-a}{x-b}\,,$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{x-b}{b-a}\,,$$

$$\frac{b-a}{t^2-1} = x-b\,,$$

$$\frac{b-a}{t^2-1} + b = x$$

i formalnie[57]

$$dx = \frac{2\cdot(a-b)\cdot t}{\left(t^2-1\right)^2}\, dt\,.$$

[56]Znowu przyjmując założenie $t \geqslant 0$.
[57]Znak "–" rekompensujemy zmianą kolejności "a" i "b" w odejmowaniu.

Pozostaje zauważyć, że

$$\sqrt{(x-a)\cdot(x-b)} = |x-b|\cdot\sqrt{\frac{(x-a)}{(x-b)}} = \operatorname{sgn}(x-b)\cdot(x-b)\cdot\sqrt{\frac{(x-a)}{(x-b)}}\,,$$

gdzie $\operatorname{sgn}(x-b)$ jest po prostu stałą ±1, przyjmującą wartość -1 dla $x<b$ oraz wartość 1 dla $x>b$.

W konsekwencji

$$\int R\left(x,\, \sqrt{(x-a)\cdot(x-b)}\right)\, dx = \int R\left(\frac{b-a}{t^2-1}+b, \operatorname{sgn}\left(\frac{b-a}{t^2-1}\right)\cdot\frac{b-a}{t^2-1}\cdot t\right)\cdot\frac{2\cdot(a-b)\cdot t}{\left(t^2-1\right)^2}\, dt\,.$$

Przykład 33:
Sprowadzić całkę

$$\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}\right)\, dx\,,$$

gdzie $a\neq b$, do całki z funkcji wymiernej.

Rozwiązanie:
wykonując podstawienie

$$t=\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}$$

otrzymujemy kolejno

$$t^n=\frac{x-a}{x-b}\,,$$

$$t^n=\frac{x-b+(b-a)}{x-b}\,,$$

$$t^n=1+\frac{b-a}{x-b}\,,$$

$$t^n-1=\frac{b-a}{x-b}\,,$$

$$\frac{1}{t^n-1}=\frac{x-b}{b-a}\,,$$

$$\frac{b-a}{t^n-1}=x-b\,,$$

$$\frac{b-a}{t^n-1}+b=x$$

i formalnie[58]

$$dx=\frac{n\cdot(a-b)\cdot t^{n-1}}{\left(t^n-1\right)^2}\, dt\,.$$

Wobec tego

$$\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}\right)\, dx = \int R\left(\frac{b-a}{t^n-1}+b, t\right)\cdot\frac{n\cdot(a-b)\cdot t^{n-1}}{\left(t^n-1\right)^2}\, dt\quad.$$

[58]Znak "–" rekompensujemy zmianą kolejności "a" i "b" w odejmowaniu.

Przykład 34:
Sprowadzić całkę

$$\int R(e^x)\,dx$$

do całki z funkcji wymiernej.
Rozwiązanie:
Podstawiając $t=e^x$, czyli[59] $x=\ln t$ i formalnie $dx=\frac{dt}{t}$, otrzymujemy

$$\int R(e^x)\,dx=\int \frac{R(t)}{t}\,dt\,.$$

[59] A tutaj nie muszę wyraźnie zakładać $t>0$, gdyż założenie to jest ukryte w dziedzinie logarytmu.