Całkowanie funkcji wymiernych.

Funkcją wymierną nazywamy funkcję będącą ilorazem dwóch wielomianów[39].

Możliwość całkowania funkcji wymiernych wynika z następujących dwóch faktów:
• Każdą funkcję wymierną potrafimy[40] wyrazić w postaci sumy wielomianu oraz specjalnych funkcji wymiernych zwanych ułamkami prostymi.
• Potrafimy scałkować każdy ułamek prosty.

Ułamkami prostymi nazywamy funkcje wymierne następujących postaci:

$$\frac{A}{(x+a)^n}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n},$$

gdzie a, b, A, B są liczbami rzeczywistymi, n jest liczbą całkowitą dodatnią, a trójmian kwadratowy x^2+ax+b nie ma pierwiastków rzeczywistych[41].

Najpierw nauczmy się całkować ułamki proste.

Dla ułamków prostych, których mianownik jest potęgą dwumianu liniowego, wzory są nam już dobrze znane:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|+C \qquad \text{oraz} \qquad \int \frac{dx}{(x+a)^n} = -\frac{1}{(n-1)\cdot(x+a)^{n-1}}+C \quad \text{dla } n\geqslant 2\,.$$

W przypadku, gdy mianownik ułamka prostego jest potęgą dwumianu kwadratowego x^2+1, możliwe są następujące cztery sytuacje[42]:

(1) $$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C\,,$$

(2) $$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{\ln(x^2+1)}{2}+C\,,$$

(3) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot(x^2+1)^{n-1}}+C \quad \text{dla } n\geqslant 2\,,$$

(4) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = ????? \quad \text{dla } n\geqslant 2\,,$$

Przypadek **(4)** jest najbardziej kłopotliwy i zajmiemy się nim za chwilę.

Wcześniej jednak odnotujmy, że całkę z ułamka prostego o mianowniku będącym potęgą nierozkładalnego trójmianu kwadratowego możemy odpowiednimi podstawieniami sprowadzić do całki, która w mianowniku ma potęgę dwumianu kwadratowego x^2+1.

---

[39] Oczywiście mianownik nie może być wielomianem tożsamościowo równym zeru.

[40] Teoretycznie potafimy, natomiast w praktyce może to być trudne. Problem polega na tym, że zakładamy możliwość znalezienia pierwiastków dowolnego wielomianu, czego w ogólności nie daje się zrobić przy użyciu czterech działań i pierwiastkowania. Uznajemy jednak, że rozwiązywanie równań wielomianowych jest problemem znacznie mniejszego kalibru niż całkowanie. W konsekwencji całka z funkcji wymiernej może być wyrażona jakimś wzorem, w którym mają prawo występować dowolne liczby rzeczywiste, nie tylko takie, które umiemy zapisać ładnym wzorkiem.

[41] Czyli nie rozkłada się na iloczyn wielomianów liniowych.

[42] Przypadki **(2)** i **(3)** wyliczamy dzięki podstawieniu $t=x^2+1$.

Przykład 23:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

Rozwiązanie:
Główna sztuczka opiera się na dosyć nieoczekiwanym[43] całkowaniu przez części w całce

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

W tym celu wyciągniemy z licznika czynnik x, który będziemy różniczkować, a drugi czynnik x wraz z mianownikiem będziemy całkować[44]. Otrzymujemy:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = x\cdot\frac{-1}{2\cdot(x^2+1)} - \int 1\cdot\frac{-1}{2\cdot(x^2+1)}\,dx =$$
$$= -\frac{x}{2\cdot(x^2+1)} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x^2+1}\,dx = -\frac{x}{2\cdot(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C\,.$$

Druga, mniej zaskakująca[45] sztuczka, polega na zapisaniu licznika 1 w wyjściowej całce w postaci $(x^2+1)-x^2$ w celu rozbicia obliczanej całki na dwie całki. Składając to wszystko razem otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx =$$
$$= \int\frac{1}{x^2+1}\,dx - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \operatorname{arctg} x - \left(-\frac{x}{2\cdot(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right) + C =$$
$$= \frac{x}{2\cdot(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C\,.$$

Przykład 24:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}\,.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy obliczenia identyczną metodą jak w przykładzie poprzednim oraz wykorzystamy uzyskaną w poprzednim przykładzie całkę:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2\cdot(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C\,.$$

---

[43] Nieoczekiwanym, jeśli ktoś czegoś takiego wcześniej nie widział.

[44] Gotowy wynik całkowania tego czynnika mamy we wzorze **(3)** na poprzedniej stronie.

[45] Ale też nieoczywista, jeśli ktoś nie jest przyzwyczajony do tego typu manipulacji wyrażeniami algebraicznymi.

Otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^3}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - \left(x\cdot\frac{-1}{4\cdot(x^2+1)^2} - \int 1\cdot\frac{-1}{4\cdot(x^2+1)^2}\,dx\right) =$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + \frac{x}{4\cdot(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{4\cdot(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\cdot\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{4\cdot(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{x}{2\cdot(x^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{x}{4\cdot(x^2+1)^2} + \frac{3\cdot x}{8\cdot(x^2+1)} + \frac{3\cdot\operatorname{arctg} x}{8} + C\,.$$

W analogiczny sposób możemy sprowadzić problem obliczenia całki

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

do całki

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\,.$$

A teraz zobaczmy na przykładzie, jak można odpowiednimi podstawieniami sprowadzić przypadek funkcji wymiernej z potęgą ogólnego trójmianu kwadratowego w mianowniku do całki ze standardowym dwumianem x^2+1.

Przykład 25:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+14}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Najpierw przekształćmy trójmian kwadratowy do postaci: kwadrat dwumianu liniowego plus stała. Otrzymujemy:

$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+14}\,dx = \int \frac{x+1}{(x+3)^2+5}\,dx\,.$$

Teraz podstawmy otrzymany dwumian liniowy za nową zmienną, czyli $y=x+3$ lub równoważnie $x=y-3$ i formalnie $dx=dy$:

$$\int \frac{x+1}{(x+3)^2+5}\,dx = \int \frac{y-2}{y^2+5}\,dy\,.$$

Następnie wykonajmy przekształcenia algebraiczne przygotowujące całkę do kolejnego podstawienia mającego na celu zrównanie w mianowniku współczynnika przy y^2 z wyrazem wolnym:

$$\int \frac{y-2}{y^2+5}\,dy = \int \frac{y-2}{5\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2+5}\,dy\,.$$

Podstawmy za nową zmienną wyrażenie w nawiasie w mianowniku:

$$t=\frac{y}{\sqrt{5}}\,, \qquad y=\sqrt{5}\cdot t\,, \qquad dy=\sqrt{5}\,dt\,,$$

$$\int \frac{y-2}{5\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2+5}\,dy = \int \frac{\sqrt{5}\cdot t-2}{5\cdot t^2+5}\cdot\sqrt{5}\,dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\int \frac{\sqrt{5}\cdot t-2}{t^2+1}\,dt =$$

$$=\int \frac{t}{t^2+1}\,dt - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\ln\left(t^2+1\right)}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg} t + C\,.$$

Teraz wystarczy przekształcić wynik do wyjściowej zmiennej:

$$\frac{\ln\left(t^2+1\right)}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg} t + C = \frac{\ln\left(\frac{y^2}{5}+1\right)}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{5}} + C =$$

$$=\frac{\ln\left(\frac{(x+3)^2}{5}+1\right)}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}} + C = \frac{\ln\left(\frac{x^2+6x+14}{5}\right)}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}} + C =$$

$$=\frac{\ln\left(x^2+6x+14\right)}{2} - \frac{\ln 5}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}} + C =$$

$$=\frac{\ln\left(x^2+6x+14\right)}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}} + C_1\,,$$

gdyż stała $\frac{\ln 5}{2}$ zostaje wchłonięta przez stałą całkowania[46].

Przykład powyższy jest na tyle ogólny, że wiadomo już jak poradzić sobie z dowolną potęgą dowolnego nierozkładalnego trójmianu kwadratowego w mianowniku.

Dla zakończenia opisu metody całkowania funkcji wymiernych trzeba wyjaśnić jak rozkładać funkcje wymierne na sumę ułamków prostych.

Podstawowe kroki tej procedury są następujące:

• Mając daną funkcję wymierną $\frac{W(x)}{P(x)}$ wyłaczamy z niej część wielomianową. W tym celu dzielimy wielomian $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ z resztą: $W(x)=Q(x)\cdot P(x)+R(x)$, gdzie $R(x)$ ma **mniejszy** stopień niż $P(x)$. Wówczas

$$\frac{W(x)}{P(x)} = \frac{Q(x)\cdot P(x)+R(x)}{P(x)} = Q(x)+\frac{R(x)}{P(x)}\,.$$

• Rozkładamy mianownik $P(x)$ na iloczyn potęg wielomianów nierozkładalnych nad $\mathbb{R}$, czyli liniowych oraz kwadratowych bez pierwiastków rzeczywistych.

[46] Dlatego do stałej całkowania dopisujemy indeks, żeby uwzględnić to, że się zmieniła przy wchłanianiu składnika $\frac{\ln 5}{2}$.

• Dla każego czynnika $V(x)^n$ tego rozkładu uwzględniamy w rozkładzie n ułamków prostych z mianownikami $V(x)^k$ dla $k=1,2,\ldots,n$.
• Wymnażamy stronami[47] przez wspólny mianownik. Otrzymujemy równość wielomianów, przyrównujemy współczynniki po obu jej stronach i rozwiązujemy otrzymany w ten sposób układ równań liniowych w celu wyliczenia szukanych współczynników.

Przykład 26:
Wypisać postać rozkładu na ułamki proste funkcji wymiernej

$$\frac{W(x)}{(x+1)\cdot(x+7)^5\cdot\left(x^2+3x+37\right)^2\cdot\left(x^2-7x+73\right)^4},$$

gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia mniejszego od 18.

Rozwiązanie:
Należy uwzględnić ułamki proste z następującymi mianownikami:
• $x+1$,
• $(x+7)^k$ dla $k=1,2,3,4,5$,
• $\left(x^2+3x+37\right)^k$ dla $k=1,2$,
• $\left(x^2-7x+73\right)^k$ dla $k=1,2,3,4$.

Trzeba pamiętać, że w przypadku mianownika będącego potęgą funkcji liniowej licznik jest stałą, a w przypadku mianownika będącego potęgą funkcji kwadratowej licznik jest funkcją liniową.

W konsekwencji szukalibyśmy przedstawienia w postaci[48]:

$$\frac{W(x)}{(x+1)\cdot(x+7)^5\cdot\left(x^2+3x+37\right)^2\cdot\left(x^2-7x+73\right)^4}=$$

$$=\frac{A}{x+1}+$$

$$+\frac{B}{(x+7)^5}+\frac{D}{(x+7)^4}+\frac{E}{(x+7)^3}+\frac{F}{(x+7)^2}+\frac{G}{x+7}+$$

$$+\frac{Hx+I}{\left(x^2+3x+37\right)^2}+\frac{Jx+K}{x^2+3x+37}+$$

$$+\frac{Lx+M}{\left(x^2-7x+73\right)^4}+\frac{Nx+P}{\left(x^2-7x+73\right)^3}+\frac{Qx+R}{\left(x^2-7x+73\right)^2}+\frac{Sx+T}{x^2-7x+73}.$$

To kończy rozwiązanie zadania. Gdybyśmy chcieli znaleźć rozkład, należałoby powyższą równość przemnożyć stronami przez wspólny mianownik, powymnażać, a następnie ułożyć i rozwiązać układ 18 równań[49] liniowych z 18 niewiadomymi.

[47] Wymnażamy równanie (funkcja wymierna)=(postać rozkładu).
[48] Omijam literkę C, bo w całkach nieoznaczonych występuje jako stała całkowania, a także literkę O bardzo podobną do zera.
[49] Równania powstałyby z porównania współczynników przy x^k dla $k=0,1,2,\ldots,17$.

Przykład 27:

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x^4+x^2}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+3}{x^4+x^2}=\frac{2x+3}{(x^2+1)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x}\,,$$

$$2x+3=(Ax+B)\cdot x^2+D\cdot\left(x^2+1\right)+E\cdot\left(x^2+1\right)\cdot x\,,$$

$$2x+3=Ax^3+Bx^2+Dx^2+D+Ex^3+Ex\,,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+E \\ 0 &= B+D \\ 2 &= E \\ 3 &= D\,, \end{cases}$$

skąd $A=-2$ i $B=-3$. W konsekwencji

$$\int \frac{2x+3}{x^4+x^2}\,dx=\int \frac{-2x}{x^2+1}-\frac{3}{x^2+1}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}\,dx=-\ln\left(x^2+1\right)-3\operatorname{arctg}x-\frac{3}{x}+2\ln|x|+C\,.$$

Przykład 28:

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny):

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x+2}+\frac{E}{x+3}\,,$$

$$\begin{aligned} 2x+3 \;=\; & A\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) \;+\; B\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x+3) \;+ \\ +\; & D\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+3) \;+\; E\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (*), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy[50] do równości (*) kolejno[51] $x=0, -1, -2, -3$. Otrzymujemy:

dla $x=0$ $\quad 3=6A$, skąd $A=1/2$,

dla $x=-1$ $\quad 1=-2B$, skąd $B=-1/2$,

dla $x=-2$ $\quad -1=2D$, skąd $D=-1/2$,

dla $x=-3$ $\quad -3=-6E$, skąd $E=1/2$.

[50]Taka metoda jest o wiele szybsza, zwłaszcza przy wysokim stopniu mianownika, jednak można ją wydajnie zastosować tylko w przypadku mianownika będącego iloczynem różnych czynników liniowych.

[51]To są wartości x, przy których czynniki liniowe się zerują.

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\ln|x|-\ln|x+1|-\ln|x+2|+\ln|x+3|)+C\,.$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx=\int\frac{2x+3}{\big(x\cdot(x+3)\big)\cdot\big((x+1)\cdot(x+2)\big)}\,dx=$$

$$=\int\frac{2x+3}{(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)}\,dx\,,$$

a następnie podstawiamy $t=x^2+3x$ i formalnie $dt=(2x+3)\,dx$. Otrzymujemy

$$\int\frac{2x+3}{(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)}\,dx=\int\frac{dt}{t\cdot(t+2)}\,.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t\cdot(t+2)}=\frac{1/2}{t}-\frac{1/2}{t+2}\,,$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\int\frac{dt}{t\cdot(t+2)}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot(\ln|t|-\ln|t+2|)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\Big(\ln\left|x^2+3x\right|-\ln\left|x^2+3x+2\right|\Big)+C\,.$$