## Całkowanie przez podstawienie.

Zadanie 19 z listy 1 można przepisać w postaci:

$$\int f_1'(f_2(x))\cdot f_2'(x)\,dx=f_1(f_2(x))+C\,,$$

a jeśli ktoś woli uniknąć indeksów zmniejszających czytelność wzoru, to po odpowiedniej zmianie oznaczeń możemy napisać:

$$\int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx=f(g(x))+C\,.$$

Zanim przyjrzymy się przykładom zastosowania powyższego wzoru[27], przepiszmy go przy nieco zmienionych oznaczeniach tak, aby czynniki funkcji podcałkowej były oznaczone pojedynczymi literkami:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=F(g(x))+C\,,$$

gdzie $F$ jest funkcją pierwotną funkcji $f$. Innymi słowy, jeśli mamy obliczyć całkę nieoznaczoną ze złożenia dwóch funkcji mnożonego przez pochodną funkcji wewnętrznej[28], to możemy to zagadnienie sprowadzić do znalezienia funkcji pierwotnej funkcji zewnętrznej.

Podstawowa[29] procedura jest więc taka. Mamy do obliczenia całkę nieoznaczoną. Udaje nam się zapisać funkcję podcałkową w postaci wyrażenia zależnego od $g(x)$ mnożonego przez $g'(x)$:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx\,.$$

No to teraz cała rzecz sprowadza się do znalezienia funkcji pierwotnej funkcji $f$, czyli do obliczenia całki nieoznaczonej[30]

$$\int f(t)\,dt\,.$$

Oczywiście nie bedziemy na co dzień zamieszczać takiego opisu słownego jak powyżej. Po prostu dokonamy formalnego zabiegu zmiany zmiennej całkowania[31] oznajmiając, że stosujemy podstawienie $t=g(x)$ i dokonując odpowiedniej transformacji funkcji podcałkowej, a także formalnej zamiany wyrażenia $g'(x)\,dx$ na $dt$. Pamiętajmy, że równość

$$g'(x)\,dx=dt$$

ma charakter czysto formalny i nie będziemy jej nadawać osobnego sensu.

[27]To jest właśnie esencja tytułowego całkowania przez podstawienie, chociaż będziemy go także używać w nieco innych konfiguracjach.

[28]W tej chwili może się to wydawać dość karkołomne, bo sugeruje, że będzie trzeba zapisywać funkcję podcałkową w takiej bardzo specyficznej postaci. Jak później zobaczymy, nie jest tak źle, bo wprowadzimy reguły rachunkowe, które bardzo uproszczą całą procedurę.

[29]Może niezbyt wygodna w bardziej skomplikowanych przykładach, ale wystarczająca na etapie zaznajamiana się z metodą całkowania przez podstawienie.

[30]Celowo zmienną oznaczyłem inną literką.

[31]O całkowaniu przez podstawienie mówi się także jak o zmianie zmiennej całkowania.

Cały rachunek będzie wyglądał następująco:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt=F(t)+C=F(g(x))+C\,,$$

musimy bowiem pamiętać, aby na końcu przepisać wynik w języku zmiennej, która występowała w wyjściowej całce. Odnotujmy też, że przy zmianie zmiennej[32] możemy stosować nie tylko zależność $t=g(x)$, ale także zależność $x=g^{-1}(t)$, gdzie $g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do $g$.

Popatrzmy teraz na proste przykłady.

**Przykład 20:**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x\cdot e^{x^2}\,dx\,.$$

*Rozwiązanie:*
Ponieważ dominującym elementem funkcji podcałkowej jest czynnik $e^{x^2}$, spróbujemy[33] wykonać podstawienie $t=x^2$.

Podstawienie $t=x^2$ wiąże się z formalnym wzorem $dt=2x\,dx$, który wykorzystamy do przekształcenia całki do nowej zmiennej. Cały rachunek będzie wyglądał następująco:

$$\int x\cdot e^{x^2}\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot e^{t}\,dt=\frac{e^t}{2}+C=\frac{e^{x^2}}{2}+C\,.$$

**Przykład 21:**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx\,.$$

*Rozwiązanie:*
Wykonamy podstawienie[34] $t=x^2+1$, które wiąże się z formalnym wzorem $dt=2x\,dx$. Otrzymujemy[35]:

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\frac{\ln|t|}{2}+C=\frac{\ln(x^2+1)}{2}+C\,.$$

---

[32] Zarówno przy wykonywaniu podstawienia w całce, jak i przy przekształcaniu końcowego wyniku do wyjściowej zmiennej.

[33] To jest też szczególny przykład ogólnej wskazówki dotyczącej wyboru podstawienia: jeżeli w argumencie funkcji wykładniczej lub trygonometrycznej występuje jakieś wyrażenie, to spróbować podstawić je za nową zmienną.

[34] Postawienie $t=x^2$ byłoby również skuteczne.

[35] Zauważ, że pomijamy moduł w argumencie logarytmu w momencie, gdzy widać, że argument ten jest oczywiście dodatni.

**Przykład 22:**
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int x\cdot\sqrt{x+1}\,dx\,.$$

*Rozwiązanie:*
To jest powtórzony przykład 15 z wykładu 2 (strona 9). Wówczas zastosowaliśmy całkowanie przez części, ale można tu równie dobrze wykonać podstawienie.

Jakie podstawienie? Otóż mając funkcję podcałkową w postaci wielomianu zanieczyszczonego jakimś pierwiastkiem, możemy próbować podstawić ten pierwiastek za nową zmienną[36].

Stosując dotychczas poznane procedury, przymierzamy się do wykonania podstawienia $t=\sqrt{x+1}$, czyli formalnie $dt=\frac{dx}{2\cdot\sqrt{x+1}}$. To się daje zrobić (spróbuj !!!), ale jest dość niewygodne, bo trzeba by wydłubać z funkcji podcałkowej czynnik $\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}$, aby go dokleić do $dx$, a resztę funkcji podcałkowej wyrazić w zależności od $\sqrt{x+1}$.

Można uprościć rachunki zauważając, że podstawienie

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

oparte na formalnej zależności $dt=g'(x)\,dx$ można równie dobrze wykonać wychodząc od wyrażenia starej zmiennej przez nową $x=g^{-1}(t)$, które prowadzi do formalnej zależności $dx=\left(g^{-1}\right)'(t)\,dt$. W konsekwencji ogólny schemat[37] takiego podstawienia ma postać

$$\int f(x)\,dx=\int f\left(g^{-1}(t)\right)\cdot\left(g^{-1}\right)'(t)\,dt$$

Wracając do rozważanego przykładu, to zależność $t=\sqrt{x+1}$ jest równoważna[38] zależności $x=t^2-1$, która daje formalną zależność $dx=2t\,dt$. W konsekwencji możemy przeprowadzić obliczenie danej całki następująco:
$$\int x\cdot\sqrt{x+1}\,dx=\int\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=2\cdot\int t^4-t^2\,dt=\frac{2\cdot t^5}{5}-\frac{2\cdot t^3}{3}+C=$$
$$=\frac{2\cdot(x+1)^{5/2}}{5}-\frac{2\cdot(x+1)^{3/2}}{3}+C\,.$$

[36]Na razie nie będę wyjaśniał, kiedy takie podstawienie daje pewność powodzenia, a kiedy jedynie mglistą szansę.

[37]Literka $f$ oznacza w tym wzorze inną funkcję niż we wzorze powyżej. Tutaj $f$ jest całą funkcją podcałkową, podczas gdy poprzednio jedynie występowała w funkcji podcałkowej. Nie chcę jednak sięgać tu do kolejnych liter alfabetu.

[38]Przy dodatkowym warunku $t\geqslant 0$. Często jednak obliczanie całek nieoznaczonych sprowadza się do bezrefleksyjnego mielenia wzorkami i nie zwraca się wówczas uwagi na założenia o zakresie wartości poszczególnych zmiennych.

A w przykładzie 15 wyszło nam

$$x \cdot \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3} - \frac{4 \cdot (x+1)^{5/2}}{15} + C\,.$$

To który wynik jest poprawny?

**Uwaga:** Związek między starą i nową zmienną w podstawieniu może mieć też postać obustronnie uwikłaną:

$$g(x) = h(t)\,.$$

Wówczas można zastosować formalny wzór

$$g'(x)\,dx = h'(t)\,dt\,.$$