Całkowanie przez części.

Zadanie 18 z listy 1 można przepisać w postaci:

$$\int f_1'(x)\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)\,dx=f_1(x)\cdot f_2(x)+C\,,$$

a jeśli ktoś woli uniknąć indeksów zmniejszających czytelność wzoru, to po odpowiedniej zmianie oznaczeń możemy napisać:

$$\int f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)+C$$

lub po rozbiciu sumy na dwie całki:

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx+\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)+C\,.$$

Przeniesienie jednej z tych całek na drugą stronę prowadzi do wzoru[17]

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx\,.$$

Z ostatniego wzoru wynika, że problem obliczenia całki nieoznaczonej

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

możemy zastąpić problemem obliczenia całki nieoznaczonej

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx\,.$$

Czyli zamiast obliczać całkę z iloczynu, możemy próbować obliczyć całkę z nieco innego iloczynu. Pozornie wydaje się, że taka zamiana nie przynosi wielkich korzyści. Są jednak sytuacje, kiedy dzięki takiemu zabiegowi jesteśmy w stanie doprowadzić rachunki do szczęśliwego końca.

Zanim przyjrzymy się przykładom zastosowania powyższego wzoru[18], przepiszmy go przy nieco zmienionych oznaczeniach tak, aby czynniki funkcji podcałkowej były oznaczone pojedynczymi literkami:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx=F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)\,dx\,,$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f. Innymi słowy, jeśli mamy obliczyć całkę nieoznaczoną z iloczynu, to możemy to zagadnienie przehandlować na problem obliczenia całki z pokrewnego iloczynu, w którym jeden czynnik został zróżniczkowany, a drugi scałkowany. Potrzebujemy dwóch rzeczy. Po pierwsze nabrać jakiegoś wyczucia, kiedy taki zabieg ma szansę doprowadzić nas do upragnionego wyniku. A po drugie, opanować rzemiosło rachunkowe tak, aby sprawnie i poprawnie takie całkowanie przez części wykonać.

[17] Zauważ brak stałej całkowania. Wynika on z tego, że każda całka nieoznaczona zawiera w sobie ukrytą stałą całkowania. Nie piszemy więc stałej całkowania po tej stronie równości, po której występuje choćby jedna całka nieoznaczona.

[18] To jest właśnie tytułowe całkowanie przez części.

Przykład 13:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x\cdot e^x\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Funkcja podcałkowa jest zapisana jako iloczyn i ten właśnie iloczyn wykorzystamy przy całkowaniu przez części. Trzeba jednak podjąć decyzję: który czynnik będziemy całkować, a który różniczkować. A to wymaga odpowiedzi na pytanie: co chcemy osiągnąć przez zmianę poszczególnych czynników? Czynnik drugi, czyli e^x, nie zmienia się ani przy różniczkowaniu, ani przy całkowaniu. Tak więc tutaj niczego nie zyskamy, ale i niczego nie stracimy.

Zajmijmy się więc pierwszym czynnikiem x. Możemy go albo zróżniczkować (do stałej 1) albo scałkować (do $x^2/2$). Czyli mamy do wyboru doprowadzenie zagadnienia do obliczenia całki[19]

$$\int 1\cdot e^x\,dx \qquad \text{albo} \qquad \int x^2\cdot e^x\,dx\,.$$

Od razu dostrzegamy, że pierwsza całka jest bardzo prosta do wyliczenia. Powinniśmy więc całkować przez części różniczkując czynnik x i całkując czynnik e^x. Otrzymujemy więc

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C\,.$$

Dlaczego to zadziałało ?

Zobaczyliśmy przykład pierwszego sposobu zastosowania całkowania przez części:
Jeżeli jeden czynnik funkcji podcałkowej jest wielomianem, a drugi czynnik może wziąć "na klatę" dużo całkowań[20], to całkując przez części (jeśli trzeba, to wielokrotnie) jesteśmy w stanie różniczkowaniami unicestwić czynnik wielomianowy nie czyniąc istotnej szkody po stronie drugiego czynnika, który może być bez problemu całkowany.

Przyjrzyjmy się kolejnym przykładom **takiego właśnie** zastosowania całkowania przez części.

Przykład 14:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2\cdot \sin 3x\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dwukrotne całkowanie przez części różniczkując czynnik x^2, a całkując czynnik $\sin 3x$.

Spróbuj wykonać samodzielnie odpowiednie rachunki przed zajrzeniem na kolejną stronę.

---

[19] Z dokładnością do stałego czynnika, który nie wpływa na trudność obliczenia całki.
[20] Takimi czynnikami są na przykład e^{ax+b}, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, ale także $(ax+b)^c$.

$$\int x^2\cdot\sin 3x\,dx=x^2\cdot\frac{-\cos 3x}{3}-\int 2x\cdot\frac{-\cos 3x}{3}\,dx=$$
$$=x^2\cdot\frac{-\cos 3x}{3}-2x\cdot\frac{-\sin 3x}{9}+\int 2\cdot\frac{-\sin 3x}{9}\,dx=$$
$$=-\frac{x^2\cdot\cos 3x}{3}+\frac{2x\cdot\sin 3x}{9}+\frac{2\cdot\cos 3x}{27}+C\,.$$

Przykład 15:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int x\cdot\sqrt{x+1}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy całkowanie przez części różniczkując czynnik x, a całkując czynnik $\sqrt{x+1}$. Otrzymujemy:
$$\int x\cdot\sqrt{x+1}\,dx=x\cdot\frac{2\cdot(x+1)^{3/2}}{3}-\int 1\cdot\frac{2\cdot(x+1)^{3/2}}{3}\,dx=$$
$$=x\cdot\frac{2\cdot(x+1)^{3/2}}{3}-\frac{4\cdot(x+1)^{5/2}}{15}+C\,.$$

Przykład 16:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int x\cdot(x+1)^{99}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
W czym problem? Przecież funkcja podcałkowa jest wielomianem, a dobrze wiadomo jak całkować wielomiany. To prawda, ale zastosowanie wzoru na całkowanie ogólnego wielomianu wymagałoby zapisania funkcji podcałkowej w postaci sumy jednomianów[21], których w tym wypadku byłoby 100. Szczerze mówiąc nie palimy się do wykonania takich rachunków.

Wobec tego przeprowadzimy całkowanie przez części różniczkując czynnik x, a całkując czynnik $(x+1)^{99}$. Otrzymujemy:
$$\int x\cdot(x+1)^{99}\,dx=x\cdot\frac{(x+1)^{100}}{100}-\int 1\cdot\frac{(x+1)^{100}}{100}\,dx=$$
$$=x\cdot\frac{(x+1)^{100}}{100}-\frac{(x+1)^{101}}{10100}+C\,.$$

[21] A to wymagałoby zastosowania wzoru dwumianowego Newtona do $(x+1)^{99}$.

Przykład 17:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int x\cdot \ln x\, dx\, .$$

Rozwiązanie:
Nauczeni poprzednimi przykładami chcielibyśmy przeprowadzimy całkowanie przez części różniczkując czynnik x, a całkując czynnik $\ln x$. Tu jednak czeka nas przykra niespodzianka, bo nie potrafimy od ręki podać funkcji pierwotnej logarytmu. Logarytm nie jest funkcją, którą w prosty sposób można całkować. Ma on jednak inną własność, a mianowicie jego pochodna jest o wiele prostszą funkcją niż on sam. Może więc opłaci się nam zróżniczkować logarytm, nawet za cenę scałkowania[22] czynnika wielomianowego.

Wobec tego przeprowadzimy całkowanie przez części różniczkując czynnik $\ln x$, a całkując czynnik x. Otrzymujemy:
$$\int x\cdot \ln x\, dx=\frac{x^2}{2}\cdot \ln x-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx=\frac{x^2}{2}\cdot \ln x-\int \frac{x}{2}\, dx=\frac{x^2}{2}\cdot \ln x-\frac{x^2}{4}+C\, .$$

To jest przykład drugiego sposobu zastosowania całkowania przez części:
Jeżeli jeden czynnik funkcji podcałkowej jest wielomianem, a drugi czynnik bardzo się upraszcza przy różniczkowaniu[23], to całkujemy przez części całkując czynnik wielomianowy i różniczkując drugi czynnik.

Przykład 18:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \ln x\, dx\, .$$

Rozwiązanie:
Wprowadzamy sztuczny czynnik 1, a następnie całkujemy przez części różniczkując czynnik $\ln x$, a całkując czynnik 1. Otrzymujemy:
$$\int 1\cdot \ln x\, dx=x\cdot \ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\, dx=x\cdot \ln x-\int 1\, dx=x\cdot \ln x-x+C\, .$$

Przykład 19:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int e^x\cdot \sin x\, dx\, .$$

Rozwiązanie:
Całkujemy przez części różniczkując[24] czynnik $\sin x$, a całkując czynnik e^x. Otrzymujemy:
$$\int e^x\cdot \sin x\, dx=e^x\cdot \sin x-\int e^x\cdot \cos x\, dx\, .$$
W tym momencie wydaje się, że taka zabawa do niczego nie prowadzi, bo otrzymaliśmy całkę prawie takiej samej postaci jak wyjściowa całka.

[22] Czyli w konsekwencji za cenę podniesienia stopnia wielomianu.
[23] Takimi czynnikami są na przykład logarytm oraz arcus tangens.
[24] W tym przykładzie jest obojętne, który czynnik różniczkujemy, a który całkujemy.

Wykonajmy kolejne całkowanie przez części, pamiętając, aby różniczkować ten sam czynnik, który różniczkowaliśmy poprzednio[25]:

$$e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx \right) =$$

$$= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \, dx \, .$$

Przyjmując oznaczenie

$$I(x) = \int e^x \cdot \sin x \, dx$$

możemy przepisać efekt przeprowadzonych rachunków jako

$$I(x) = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - I(x) \, ,$$

skąd można wyliczyć $I(x)$. Otrzymujemy więc

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = I(x) = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2} + C \, .$$

To jest przykład trzeciego sposobu zastosowania całkowania przez części:
Jeżeli całkowanie przez części prowadzi do tej samej całki[26], ale ze współczynnikiem różnym od 1, to otrzymamy równanie pozwalające wyliczyć całkę nieoznaczoną.

[25]W przeciwnym razie drugie całkowanie przez częsci odwróci efekt pierwszego i wrócimy do wyjściowej całki.

[26]Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy czynniki są postaci e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$.