# Całka nieoznaczona – podstawy.

W poprzednim semestrze poznaliśmy operację różniczkowania funkcji, która funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych przyporządkowuje inną[1] funkcję, zwaną pochodną. Formalnie rzecz biorąc pochodną można przyporządkować każdej funkcji[2], jednak najbardziej interesuje nas sytuacja, gdy wyjściowa funkcja jest określona na przedziale[3] lub sumie przedziałów, a pochodną ma na całej lub prawie[4] całej dziedzinie.

Poznaliśmy reguły różniczkowania, które praktycznie pozwalają zapisać wzorem pochodną każdej funkcji zapisanej wzorem[5]. Taką operacją różniczkowania można się bawić, stosując ją do funkcji wielokrotnie i uzyskując pochodne wysokich rzędów.

Naturalnym pytaniem jest pytanie o operację odwrotną do różniczkowania[6].

Zajmiemy się więc następującym zagadnieniem: Dana jest tajna funkcja różniczkowalna na przedziale otwartym lub na sumie przedziałów otwartych, której to funkcji wprawdzie nie znamy, ale podano nam jej pochodną. Czy i w jakim stopniu możemy na podstawie tej pochodnej odtworzyć samą funkcję? Lub zagadnienie pokrewne: Dla danej funkcji[7] znaleźć funkcję, której ta dana funkcja jest pochodną.

Na początek zajmiemy się sytuacjami, kiedy funkcję taką możemy odgadnąć lub prawie odgadnąć. A to dzięki temu, że łatwo skojarzymy, czego pochodną jest podana funkcja, bądź też łatwo wskażemy funkcję, której pochodna jest na tyle podobna do danej funkcji, że możemy dokonać odpowiednich korekt.

**Przykład 1:**

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\cos x\,.$$

*Rozwiązanie:*

Przypominając sobie tabelkę funkcji i ich pochodnych, kojarzymy, że warunek ten jest spełniony przez funkcję $f$ określoną wzorem

$$f(x)=\sin x\,.$$

[1]Inną, to znaczy "potencjalnie inną". Żeby mi ktoś zaraz nie wyjechał z funkcją wykładniczą określoną wzorem $e^x$, której pochodna jest funkcją tą samą, a nie inną.

[2]Kosztem ewentualnego okrojenia dziedziny, która w skrajnym wypadku może okazać się pusta.

[3]Otwartym czy domkniętym? Celowo tego nie precyzuję.

[4]Celowo też nie precyzuję użytego tu słowa "prawie".

[5]I tutaj celowo nie precyzuję, o jakim dokładnie zbiorze wzorów mówię.

[6]Z wprowadzaniem operacji odwrotnych do operacji, z którymi się już oswoiliśmy, mamy do czynienia od wczesnych etapów edukacji: operacją odwrotną do dodawania jest odejmowanie, do mnożenia dzielenie, do potęgowania z ustalonym wykładnikiem pierwiastkowanie, do potęgowania z ustaloną podstawą logarytmowanie i tak dalej.

[7]Dla ustalenia uwagi pomyślmy o funkcji ciągłej, a najlepiej podanej fajnym wzorkiem.

**Przykład 2:**
Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=x\,.$$

*Rozwiązanie:*
Ponieważ przy różniczkowaniu funkcji potęgowej wykładnik obniża się o 1, spróbujemy podwyższyć wykładnik o 1, czyli rozważyć funkcję określoną wzorem $x^2$. Jednak to prowadzi do pochodnej $2x$, czyli dwukrotnie za dużej. Wobec tego dzielimy $x^2$ przez 2 i stwierdzamy, że warunki zadania spełnia

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\,.$$

**Przykład 3:**
Wyznaczyć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że $f'(x)=0$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

*Odpowiedź:*
Takimi funkcjami $f$ są funkcje stałe.

**Przykład 4:**
Dana jest funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x)=f'(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

*Odpowiedź:*
Powyższy warunek spełniają takie funkcje $g$, że dla pewnej stałej rzeczywistej $C$:

$$g(x)=f(x)+C\,.$$

**Przykład 5:**
Dane są funkcje różniczkowalne $f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

*Odpowiedź:*
Powyższy warunek spełniają takie funkcje $g$, że dla pewnej stałej rzeczywistej $C$:

$$g(x)=f_1(x)+f_2(x)+C\,.$$

**Przykład 6:**
Dana jest funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz liczba rzeczywista $a$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x)=a\cdot f'(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

*Odpowiedź:*
Powyższy warunek spełniają takie funkcje $g$, że dla pewnej stałej rzeczywistej $C$:

$$g(x)=a\cdot f(x)+C\,.$$

**Przykład 7:**
Dana jest funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz liczba rzeczywista $a$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla każdej liczby rzeczywistej $x$ warunek $g'(x)=f'(x+a)$.

*Odpowiedź:*
Powyższy warunek spełniają takie funkcje $g$, że dla pewnej stałej rzeczywistej $C$:

$$g(x)=f(x+a)+C\,.$$

**Przykład 8:**
Dana jest funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oraz niezerowa liczba rzeczywista $a$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}$ warunek $g'(x)=f'(ax)$.

*Odpowiedź:*
Powyższy warunek spełniają takie funkcje $g$, że dla pewnej stałej rzeczywistej $C$:

$$g(x)=\frac{f(ax)}{a}+C\,.$$

**Przykład 9:**
Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=(x+1)^2\,.$$

*Odpowiedź:*
Taką funkcją jest

$$f(x)=\frac{(x+1)^3}{3}\,.$$

**Przykład 10:**
Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=x^2+2x+1\,.$$

*Odpowiedź:*
Taką funkcją jest

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+x\,.$$

**Przykład 11:**
Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, których pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\frac{1}{x}\,.$$

*Odpowiedź błędna:*
Powyższy warunek spełniają takie (i tylko takie) funkcje $f$, że dla pewnej stałej rzeczywistej $C$:

$$f(x)=\ln|x|+C\,.$$

**Przykład 12:**
Wyprowadzić wzór na $\sin^2 x$.

*Rozwiązanie:*
Niech
$$f(x)=\sin^2 x\,.$$
Wówczas
$$f'(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x\,,$$
skąd wobec
$$\frac{d}{dx}\cos 2x=-2\cdot\sin 2x$$
otrzymujemy
$$\sin^2 x=f(x)=-\frac{\cos 2x}{2}+C$$
dla pewnej stałej $C$. Wstawienie do powyższego wzoru $x=0$ daje $C=1/2$, skąd
$$\sin^2 x=-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\,.$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Obejrzawszy tuzin przykładów możemy przystąpić do usystematyzowania rozważanego zagadnienia, czyli sformułowania definicji, wprowadzenia obowiązujących oznaczeń i zebrania podstawowych wniosków.

Dla danej funkcji $f$ określonej na zbiorze będącym przedziałem[8] otwartym lub sumą[9] przedziałów otwartych, będzie interesować nas taka funkcja różniczkowalna $F$ określona na tej samej dziedzinie, co $f$, że $F'=f$. Funkcję $F$ będziemy nazywać **funkcją pierwotną** funkcji $f$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $f$ jest funkcją ciągłą[10]. Z teorii, którą rozwiniemy w przyszłości, wynika, że każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną, a na razie przyjmijmy ten fakt na wiarę[11].

Jeżeli $F$ jest funkcją pierwotną funkcji $f$, to również funkcja $F_2$ określona wzorem
$$F_2(x)=F(x)+C\,,$$
gdzie $C$ jest pewną stałą rzeczywistą, jest funkcją pierwotną funkcji $f$. I na odwrót, jeżeli $F_1$ i $F_2$ są dwiema funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji $f$, to ich różnica $F_1-F_2$ ma pochodną równą 0, a zatem jest funkcją stałą[12].

[8] Ograniczonym lub nie.

[9] Być może nieskończenie wielu.

[10] Pamiętajmy, że pochodna funkcji wprawdzie nie musi być ciągła, ale od tej ciągłości za bardzo odbiegać nie może, gdyż ma własność Darboux na każdym przedziale wchodzącym w skład dziedziny.

[11] W zasadzie nie będziemy namiętnie z tego faktu korzystać, ale świadomość istnienia funkcji pierwotnej dowolnej funkcji ciągłej będzie nam dawać pewien komfort psychiczny.

[12] To jest kłamstwo, bo funkcja o zerowej pochodnej wcale nie musi być stała. Ale łatwo w to kłamstwo uwierzyć, a że mam zamiar je sprostować przed końcem dzisiejszego wykładu, przeto nie mam żadnych skrupułów, aby Wam to kłamstwo zaserwować i przez czas jakiś w błędnym przekonaniu Was trzymać.

Morał stąd jest taki, że znajomość jednej funkcji pierwotnej jest równoważna ze znajomością wszystkich funkcji pierwotnych, gdyż wszystkie funkcje pierwotne różnią się o stałą.

Funkcję pierwotną funkcji $f$ nazywamy też **całką nieoznaczoną** i stosujemy oznaczenie:

$$\int f(x)\,dx\,,$$

przy czym tak naprawdę powyższy napis nie oznacza jednej funkcji pierwotnej, ale ogólny wzór[13] dający wszystkie funkcje pierwotne. W konsekwencji wzór ten musi zawierać w sobie niejednoznaczność funkcji pierwotnej, czyli stałą $C$, która może przyjąć dowolną wartość. Stałą tą nazywamy stałą całkowania i oznaczamy lietrą $C$. Gdyby zaszła potrzeba użycia kilku różnych stałych całkowania w jednym wzorze, użyjemy litery $C$ z indeksem lub kolejnych liter alfabetu.

Zgodny z tą konwencją zapis nawiązujący do Przykładu 2, to:

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C\,.$$

Wzory, do których nawiązują Przykłady 5–8, możemy zapisać następująco:

$$\int f_1(x)\pm f_2(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx$$

$$\int a\cdot f(x)\,dx=a\cdot\int f(x)\,dx$$

$$F'=f \quad\Rightarrow\quad \int f(x+a)\,dx=F(x+a)+C$$

$$F'=f \quad\Rightarrow\quad \int f(ax)\,dx=\frac{F(ax)}{a}+C$$

Z kolei Przykłady 9–10 dają odpowiednio

$$\int (x+1)^2\,dx=\frac{(x+1)^3}{3}+C=\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}+C$$

oraz

$$\int x^2+2x+1=\frac{x^3}{3}+x^2+x+C\,,$$

co wobec równości lewych stron mogłoby sugerować

$$\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}+C=\frac{x^3}{3}+x^2+x+C\,,$$

skąd

$$\frac{1}{3}=0\,.$$

[13] Czasami mówi się, że całka nieoznaczona jest zbiorem wszystkich funkcji pierwotnych, co jednak nie byłoby wygodne, bo dodawanie całek nieoznaczonych byłoby dodawaniem zbiorów, którą to operację trzeba by jakoś zdefiniować.

W rzeczywistości jednak składnik 1/3 jest wchłaniany przez stałą całkowania, a nieporozumienie bierze się ze skonfrontowania ze sobą dwóch wzorów, w których różne stałe zostały oznaczone tą samą literą.

Powinniśmy napisać

$$\int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_1$$

oraz

$$\int x^2 + 2x + 1 = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C_2\,,$$

co doprowadziłoby do równości

$$\frac{1}{3} + C_1 = C_2\,,$$

która po prostu wiąże ze sobą stałe całkowania występujące w dwóch różnych wzorach.

I na koniec nawiązanie do Przykładu 11, gdzie[14]

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,.$$

To może błędnie sugerować, że wszystkie funkcje pierwotne funkcji określonej wzorem $1/x$ są postaci $\ln|x|+C$. Tymczasem nadszedł odpowiedni moment, aby wyjaśnić wcześniejsze kłamstwo. Otóż funkcja o zerowej pochodnej nie musi być stała. Ona musi być stała na każdym przedziale[15] wchodzącym w skład dziedziny, ale na różnych przedziałach mogą to być różne stałe. Nie rozróżniamy tego zapisując stałą całkowania, która tak naprawdę oznacza funkcję stałą na każdym przedziale dziedziny. Ale faktycznie funkcje pierwotne funkcji określonej wzorem $1/x$ są postaci

$$\begin{cases} \ln x + C_1 & \text{dla} \quad x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

gdzie $C_1$ i $C_2$ są dowolnymi stałymi.

## Obejrzyj w internecie[16] wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **61:** Definicja funkcji pierwotnej; całki nieoznaczonej.

[14] Możemy też użyć skróconego zapisu:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x}\,.$$

[15] W języku topologicznym: na każdej składowej spójnej.

[16] Pod adresem: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`