151. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę sześcianów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n^3+n\right)^{2/3}+n\cdot\left(n^3+n\right)^{1/3}+n^2}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n^3+7n^3\right)^{2/3}+n\cdot\left(n^3+7n^3\right)^{1/3}+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2+2n^2+n^2}=\frac{1}{7}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty\,.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

152. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n}-n\right)$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n}-n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(\sqrt[4]{n^4+n}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+n}+n^2\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(\sqrt[4]{n^4+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+0}+n^2\right)}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty\,.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.

153. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}\right)\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcimy dany w zadaniu szereg korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów, a następnie skorzystamy z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2+1\right)^{2/3}+n^{2/3}\cdot\sqrt[3]{n^2+1}+n^{4/3}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2+0\right)^{2/3}+n^{2/3}\cdot\sqrt[3]{n^2+0}+n^{4/3}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}<+\infty\,,$$

bo $4/3>1$.

Odpowiedź: Dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

154. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{28^n \cdot (n!)^3} .$$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z kryterium d'Alemberta.

W tym celu przekształcimy iloraz kolejnych wyrazów szeregu, przejdziemy z nim do granicy przy $n \to \infty$, a następnie porównamy otrzymaną granicę z liczbą 1:

$$\frac{(3n+3)!}{28^{n+1} \cdot ((n+1)!)^3} \cdot \frac{28^n \cdot (n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{28 \cdot (n+1)^3} \to \frac{27}{28} < 1 ,$$

skąd wynika, że dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

155. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n} .$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego w zadaniu szeregu:

$$\frac{(n+1)! \cdot 18^{n+1}}{\binom{3n+3}{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{\binom{3n}{n} \cdot n^n}{n! \cdot 18^n} = \frac{(n+1) \cdot 18 \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!}}{\frac{(3n+3)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} =$$

$$= \frac{18}{\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{18}{\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot 3}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot 2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{18}{\frac{27}{4} \cdot e} = \frac{8}{3e} = \frac{2,(6)}{e} < 1 ,$$

skąd na mocy kryterium d'Alemberta wynika zbieżność szeregu.

Skorzystaliśmy przy tym z nierówności $e > 2,(6)$, która wynika albo z zapamiętanego rozwinięcia dziesiętnego $e = 2,7\ldots$, albo ze wzoru[1]

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} .$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

[1]Co prawda jeszcze o wzorze $e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ nie mówiliśmy, ale jak ktoś go zna, to może w razie potrzeby zastosować.

156. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{0 + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}\,,$$

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)! \cdot (n!)^2}{3 \cdot ((n+1)!)^2 \cdot (2n)!} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{3 \cdot (n+1)^2} \to \frac{4}{3} > 1\,,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

157. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_n = \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}$ i zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}} = b_n\,.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży b_n przy $n \to \infty$, stosujemy ponownie kryterium Cauchy'ego, tym razem do **ciągu** (b_n). Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}}} = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot n^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1\,.$$

Z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) wynika więc, że

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty\,.$$

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty > 1\,,$$

skąd na podstawie kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

158. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, $\boldsymbol{(2, \infty)}$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{(6, \infty)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{(12, \infty)}$ **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[5]{n^p+1}}$, $\boldsymbol{(20, \infty)}$

159. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

Wskazówka: Zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb a_n oraz $\frac{1}{n^2}$.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{n^2}} \leqslant \frac{a_n + \frac{1}{n^2}}{2},$$

czyli

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

a z założeń zadania

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty,$$

dostajemy nierówności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

160. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9\,.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 5 \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 3 \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb a_n i b_n otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leqslant \frac{a_n + b_n}{2}\,.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5\,,$$

co kończy rozwiązanie łatwiejszej wersji zadania.

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $9a_n$ i b_n otrzymujemy

$$\sqrt{9a_n \cdot b_n} \leqslant \frac{9a_n + b_n}{2}\,,$$

czyli

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leqslant \frac{9a_n + b_n}{6}\,.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3a_n}{2} + \frac{b_n}{6}\right) = \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3\,,$$

co kończy rozwiązanie trudniejszej wersji zadania.

161. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leqslant 1\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb a_n^6, b_n^3 i b_n^3 otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n^6 b_n^3 b_n^3} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^6 + b_n^3 + b_n^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3\right) = \frac{1+1+1}{3} = 1\,.$$

162. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leqslant 64\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant C\,,$$

gdzie $C=27$ **(wersja łatwiejsza)** lub $C=16$ **(wersja trudniejsza).**

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n+a_n+a_n^4}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leqslant \frac{8+8+64}{3} = \frac{80}{3} < \frac{81}{3} = 27$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{8a_n \cdot 8a_n \cdot a_n^4}}{4} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8a_n+8a_n+a_n^4}{3\cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left(8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leqslant \frac{64+64+64}{12} = \frac{192}{12} = 16\,.$$

163. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leqslant 2\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb a_n^6, $8b_n^3$ i $8b_n^3$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n^6 \cdot 8b_n^3 \cdot 8b_n^3} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^6+8b_n^3+8b_n^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 \right) = \frac{8+8+8}{12} = 2\,.$$