Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 22.04.2021.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

151. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$$

jest zbieżny.

152. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+n}-n\right)$$

jest zbieżny.

153. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}\right).$$

154. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{28^n\cdot(n!)^3}.$$

155. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 18^n}{\binom{3n}{n}\cdot n^n}.$$

156. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{7^n+\binom{2n}{n}^2}}{3^n}$$

jest zbieżny.

157. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2}\cdot n^{n^3}}.$$

158. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$, ...

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}$, ...

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt[4]{n^p+1}}$, ...

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt[5]{n^p+1}}$, ...

159. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

Wskazówka: Zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb a_n oraz $\frac{1}{n^2}$.

160. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9\,.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 5 \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 3 \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

161. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leqslant 1\,.$$

162. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leqslant 64\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant C\,,$$

gdzie $C = 27$ **(wersja łatwiejsza)** lub $C = 16$ **(wersja trudniejsza).**

163. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leqslant 2\,.$$