130. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x,\, \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right):\ x\in[0,\, 15]\right\}.$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}$ na przedziale $[a,\, b]=[0,\, 15]$ otrzymujemy:

$$\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = \int\limits_0^{15} \sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int\limits_0^{15} \sqrt{1+x}\, dx = \left.\frac{2\cdot(x+1)^{3/2}}{3}\right|_{x=0}^{15} =$$

$$=\frac{2}{3}\cdot(64-1)=\frac{2}{3}\cdot 63=42\,.$$

Odpowiedź:

Dana w zadaniu krzywa ma długość 42.

131. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x,\, x^{3/2}\right):\ x\in[0,\, 13]\right\}.$$

Rozwiązanie:

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x)=x^{3/2}$ na przedziale $[a,\, b]=[0,\, 13]$ otrzymujemy:

$$\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = \int\limits_0^{13} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int\limits_0^{13} \sqrt{1+\frac{9}{4}\cdot x}\, dx = \left.\frac{8\cdot\left(\frac{9}{4}\cdot x+1\right)^{3/2}}{27}\right|_{x=0}^{13} =$$

$$=\frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{9\cdot 13+4}{4}\right)^{3/2}-1\right)=\frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{117+4}{4}\right)^{3/2}-1\right)=\frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{121}{4}\right)^{3/2}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{1331}{8}-1\right)=\frac{1331-8}{27}=\frac{1323}{27}=\frac{1350-27}{27}=\frac{\frac{2700}{2}-27}{27}=\frac{100}{2}-1=49\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu krzywa ma długość 49.

132. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,\, g:[a,\, b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x)\leqslant g(x)$$

dla każdego $x\in[a,\, b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x,\, y):\ x\in[a,\, b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P},\, \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X=\int\limits_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\, dx\,, \qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\, dx\,, \qquad P=\int\limits_a^b g(x)-f(x)\, dx\,.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y=x^2$ i prostą o równaniu $y=x$.

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu parabola i prosta przecinają się w punktach (0, 0) i (1, 1), a przy tym $x^2 \leqslant x$ dla $x \in [0,1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a,b]=[0,1]$, $f(x)=x^2$ oraz $g(x)=x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X=\int_0^1 x\cdot\left(x-x^2\right)\,dx=\int_0^1 x^2-x^3\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\,,$$

$$Y=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 x^2-x^4\,dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{10}\Big|_{x=0}^{1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5-3}{30}=\frac{1}{15}\,,$$

$$P=\int_0^1 x-x^2\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\,.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości danej figury to $X/P=(1/12)/(1/6)=1/2$ oraz $Y/P=(1/15)/(1/6)=(2/5)$.

Odpowiedź:

Środek ciężkości danej figury leży w punkcie (1/2, 2/5).

133. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,\,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x)\leqslant g(x)$$

dla każdego $x\in[a,b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x,y):\ x\in[a,b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P},\frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx\,,\qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx\,,\qquad P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$

Wyznaczyć środek ciężkości (x_n,y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y=x$ i krzywą o równaniu $y=|x|\cdot\sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ oraz $y_G=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

Rozwiązanie:

Ponieważ dane w zadaniu krzywa i prosta przecinają się w punktach (0, 0) i (1, 1), a przy tym $|x|\cdot\sqrt[n]{|x|}\leqslant x$ dla $x\in[0,1]$, przeprowadzamy obliczenia dla $[a,b]=[0,1]$, $f(x)=x^{(n+1)/n}$ oraz $g(x)=x$. Otrzymujemy kolejno:

$$X=\int_0^1 x\cdot\left(x-x^{(n+1)/n}\right)\,dx=\int_0^1 x^2-x^{(2n+1)/n}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^{(3n+1)/n}}{(3n+1)/n}\Big|_{x=0}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{n}{3n+1}=$$

$$=\frac{1}{3\cdot(3n+1)}\,,$$

$$Y=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 x^2-x^{2(n+1)/n}\,dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^{(3n+2)/n}}{2\cdot(3n+2)/n}\Bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{6}-\frac{n}{2\cdot(3n+2)}=\frac{1}{3\cdot(3n+2)}\,,$$

$$P=\int_0^1 x-x^{(n+1)/n}\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^{(2n+1)/n}}{(2n+1)/n}\Bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2\cdot(2n+1)}\,.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości figury Z_n to

$$x_n=\frac{X}{P}=\frac{2\cdot(2n+1)}{3\cdot(3n+1)}\qquad\text{oraz}\qquad y_n=\frac{Y}{P}=\frac{2\cdot(2n+1)}{3\cdot(3n+2)}\,.$$

Wobec tego $x_G=y_G=4/9$.

Dla bardzo dużych n obszar Z_n jest nieznacznie pogrubionym odcinkiem o końcach $(0,\,0)$ i $(1,\,1)$, więc należy oczekiwać, że jego środek ciężkości leży bardzo blisko tego odcinka. W konsekwencji **należy oczekiwać, że $\boldsymbol{x_G=y_G}$.**

134. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?
Potrzebny wzór na pole powierzchni obrotowej odszukaj w notatkach z wykładu.

Odpowiedź:

Wszystkie plastry zawierają tyle samo skórki.

135. Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?
Potrzebny wzór na pole powierzchni obrotowej odszukaj w notatkach z wykładu.

Odpowiedź:

Pole ograniczone okręgiem nie zależy od promienia sfery, a jedynie od rozwarcia cyrkla użytego do narysowania okręgu. Takie samo jest pole koła narysowanego na płaszczyźnie. Pole całej sfery jest równe polu koła o promieniu równym średnicy sfery – na sferze rysujemy to tak: nóżka cyrkla w jednym biegunie, ołówek ślizga się po drugim biegunie. Natomiast półsfera powstaje przez umieszczenie nóżki na biegunie i narysowanie równika – zastanów się jaki jest wówczas rozstaw cyrkla i sprawdź, że pole się zgadza.

136. Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu

$$(x-2)^2+y^2=1$$

wokół osi OY.

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $\{(x,\,f(x)):\,x\in[a,\,b]\}$, gdzie $0\leqslant a<b$ oraz $f\in C^1([a,\,b])$, wokół osi OY jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$.

Rozwiązanie:

Przekształcanie równania obracanego okręgu prowadzi kolejno do:

$$y^2 = 1-(x-2)^2\,,$$
$$y = \pm\sqrt{1-(x-2)^2}\,.$$

Przy tym x może przebiegać przedział $[1,\,3]$.

Okrąg rozdziela się więc w naturalny sposób na dwa półokręgi, o równaniach

$$y = \sqrt{1-(x-2)^2} \qquad \text{oraz} \qquad y = -\sqrt{1-(x-2)^2}\,.$$

Ponieważ każdy z tych półokręgów tworzy przy obrocie powierzchnię obrotową o takim samym polu, możemy wyliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót jednego z nich, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2.

Aby skorzystać z podanego wzoru, przyjmujemy $[a,\,b]=[1,\,3]$ i $f(x)=\sqrt{1-(x-2)^2}$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{-(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,.$$

Zatem szukane pole jest równe

$$2\cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x\cdot\sqrt{1+\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}\,dx\,.$$

Obliczamy je wykonując podstawienie $t=x-2$:

$$2\cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x\cdot\sqrt{1+\frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}\,dx = 4\pi\cdot\int_{-1}^1 (t+2)\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt = 4\pi\cdot\int_{-1}^1 (t+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$
$$= 4\pi\cdot\int_{-1}^1 t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + 8\pi\cdot\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.$$

Ponieważ pierwsza całka w ostatniej sumie jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, kontynuujemy obliczanie drugiej całki:

$$8\pi\cdot\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 8\pi\cdot\arcsin t\,\Big|_{t=-1}^{1} = 8\pi\cdot(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 8\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right) = 8\pi^2\,.$$

Odpowiedź: Pole torusa jest równe $8\pi^2$.

Uwaga: Nieprzypadkowo pole torusa jest iloczynem długości obracanego okręgu przez drogę zakreślaną przy obrocie przez środek (czyli środek ciężkości) tego okręgu (twierdzenie Pappusa-Guldina).

137. Gdzie leży środek ciężkości półsfery?

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

Odpowiedź:

W połowie wysokości.

138. Gdzie leży środek ciężkości półkuli?
Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

Odpowiedź:
W 3/8 wysokości.

139. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

Rozwiązanie:
Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{(x,\,y):\ \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s,\,0,\,0)$, gdzie

$$x_s=\frac{\pi\cdot\int\limits_{1/3}^{1} x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx}{\pi\cdot\int\limits_{1/3}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx}.$$

Obliczamy:

$$\int\limits_{1/3}^{1} x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int\limits_{1/3}^{1} x-x^3\,dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right|_{x=1/3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{1}{324}=\frac{162-81-18+1}{324}=\frac{64}{324}=\frac{16}{81}$$

oraz

$$\int\limits_{1/3}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int\limits_{1/3}^{1} 1-x^2\,dx=\left.x-\frac{x^3}{3}\right|_{x=1/3}^{1}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{81}=\frac{81-27-27+1}{81}=\frac{28}{81},$$

skąd

$$x_s=\frac{16/81}{28/81}=\frac{4}{7}.$$

Odpowiedź: Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie $\left(\frac{4}{7},\,0,\,0\right)$.

140. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant -\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

Rozwiązanie:

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{(x,\,y):\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s,\,0,\,0)$, gdzie

$$x_s=\frac{\pi\cdot\int\limits_{-1/3}^{1} x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx}{\pi\cdot\int\limits_{-1/3}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx}.$$

Obliczamy:

$$\int\limits_{-1/3}^{1} x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int\limits_{-1/3}^{1} x-x^3\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\Bigg|_{x=-1/3}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{1}{324}=\frac{162-81-18+1}{324}=\frac{64}{324}=\frac{16}{81}$$

oraz

$$\int\limits_{-1/3}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx=\int\limits_{-1/3}^{1}1-x^2\,dx=x-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=-1/3}^{1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{81}=\frac{81-27+27-1}{81}=\frac{80}{81},$$

skąd

$$x_s=\frac{16/81}{80/81}=\frac{1}{5}.$$

Odpowiedź: Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie $\left(\frac{1}{5},\,0,\,0\right)$.