Kolokwium nr 3 (wtorek 13 kwietnia 2021): materiał zadań 1–140.
11:15-12:15 – quiz na Moodlu (60 minut)
12:20-12:40 – zadanie otwarte (20 minut)
12:50-13:45 – wykład (55 minut)

Przed rozpoczęciem kolokwium należy dołączyć do spotkania w Teamsach na kanale wykładu i włączyć kamerę.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 8.04.2021.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

130. Obliczyć długość krzywej
$$\left\{\left(x, \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right):\ x\in[0,15]\right\}.$$

131. Obliczyć długość krzywej
$$\left\{\left(x, x^{3/2}\right):\ x\in[0,13]\right\}.$$

132. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność
$$f(x)\leqslant g(x)$$
dla każdego $x\in[a,b]$, to środek ciężkości figury
$$\{(x,y):\ x\in[a,b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$
leży w punkcie $\left(\frac{X}{P},\frac{Y}{P}\right)$, gdzie
$$X=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx\,,\qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx\,,\qquad P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$
Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y=x^2$ i prostą o równaniu $y=x$.

133. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność
$$f(x)\leqslant g(x)$$
dla każdego $x\in[a,b]$, to środek ciężkości figury
$$\{(x,y):\ x\in[a,b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$
leży w punkcie $\left(\frac{X}{P},\frac{Y}{P}\right)$, gdzie
$$X=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx\,,\qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx\,,\qquad P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$
Wyznaczyć środek ciężkości (x_n,y_n) obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y=x$ i krzywą o równaniu $y=|x|\cdot\sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ oraz $y_G=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

134. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?
Potrzebny wzór na pole powierzchni obrotowej odszukaj w notatkach z wykładu.

135. Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?
Potrzebny wzór na pole powierzchni obrotowej odszukaj w notatkach z wykładu.

136. Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu

$$(x-2)^2+y^2=1$$

wokół osi OY.

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $\{(x,f(x)): x\in[a,b]\}$, gdzie $0\leqslant a<b$ oraz $f\in C^1([a,b])$, wokół osi OY jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C$.

137. Gdzie leży środek ciężkości półsfery?
Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

138. Gdzie leży środek ciężkości półkuli?
Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

139. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

140. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \wedge\ x\geqslant -\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.