113. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części (wersja 4 z wykładu 9, strona 60).

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Dla funkcji określonej na przedziale [0, 1] wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Wobec tego[1]

$$\int_0^1 x^3\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\right)=\frac{1}{4}\,.$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 x^3\,dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{x=0}^{1}=\frac{1}{4}\,.$$

114. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części (wersja 4).

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Dla funkcji określonej na przedziale [0, 1] wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Wobec tego[2]

$$\int_0^1 2^x\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot 2^{1/n}\cdot\frac{\left(2^{1/n}\right)^n-1}{2^{1/n}-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot 2^{1/n}\cdot\frac{2-1}{2^{1/n}-1}\right)=$$

[1] Korzystamy po drodze ze wzoru $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$.

[2] Korzystamy po drodze ze wzoru na sumę postępu geometrycznego.

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{1/n}}{2^{1/n}-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2^{1/n}\cdot\frac{1/n}{2^{1/n}-1}\right)=\lim_{n\to\infty}2^{1/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{2^{1/n}-1}=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{2^{1/n}-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{2^{1/n}-1}\,.$$

Jeżeli istnieje granica (funkcji)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x-1}\,,$$

to istnieje również granica (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{2^{1/n}-1}$$

i są one równe. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2^x\cdot\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$$

i tyle właśnie wynosi wartość szukanej całki.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 2^x\,dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_{x=0}^{1}=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\,.$$

115. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

Rozwiązanie:

Najpierw pokażę, w jaki sposób można naiwnie próbować rozwiązać to zadanie i dlaczgo to się nie udaje.

Dla funkcji ciągłej $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ i ciągu podziałów przedziału na równe części, interesujący nas wzór ogólny przybiera postać

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Wobec tego

$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)\,.$$

Trudnością, jaką napotykamy w tym momencie, jest brak wzoru, który pozwoliłby wyrazić sumę

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}$$

w prostej postaci pozwalającej na przejście graniczne.

No cóż, naiwnie sądziliśmy, że najłatwiej będzie wybrać możliwie najprostszy ciąg podziałów przedziału całkowania, a mianowicie podziały na równe części. Ale co nam z tego, że sam podział jest ładny, skoro funkcja podcałkowa w punktach podziału przyjmuje wartości wykluczające zwinięcie otrzymanej sumy do prostej postaci.

Musimy więc zmienić nasze priorytety. Nieważne, czy przedzialiki podziału są równe, czy nie. Przede wszystkim wartości funkcji podcałkowej w punktach podziału muszą być możliwie najprostsze. Ponieważ w rozważanym przykładzie funkcją podcałkową jest pierwiastek kwadratowy, punktami podziału powinny być liczby, których pierwiastki kwadratowe są liczbami wymiernymi, a jeszcze lepiej, jeśli nie będą to byle jakie liczby wymierne chaotycznie rozmieszczone, ale liczby wymierne tworzące w miarę regularny ciąg[3], na przykład ciąg arytmetyczny.

To prowadzi do pomysłu, aby za punkty n-tego podziału przyjąć kwadraty liczb wymiernych tworzących skończony ciąg arytmetyczny. Oczywiście taki, aby zerowy punkt podziału był lewym, a n-ty prawym końcem przedziału całkowania, czyli

$$x_{n,k}=\frac{k^2}{n^2}\,.$$

Zastosowanie ma wersja 3 (n-ty podział na n części, y-ki w prawych końcach):

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big((x_{n,k}-x_{n,k-1})\cdot f(x_{n,k})\Big)\,. \qquad (\clubsuit)$$

W naszym wypadku

$$a=0, \qquad b=1, \qquad f(x)=\sqrt{x}, \qquad x_{n,k}=\frac{k^2}{n^2}\,,$$

skąd po podstawieniu powyższych danych do wzoru ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k^2}{n^2}-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{k^2}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{2k-1}{n^2}\right)\cdot\frac{k}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2-k\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\left(2\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3}-\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{3n^2}-\frac{n+1}{2n^2}\right)=\frac{2}{3}\,.$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\Big|_{x=0}^{1}=\frac{2}{3}\,.$$

[3] Tu mamy na myśli ciąg skończony, ale słowo "skończony" pomijamy, aby nie zaburzać płynności i tak już rozbudowanego zdania.

116. Pomyślałem sobie jakąś funkcję liniową $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$. Nie podam Ci tej funkcji, ale Ty masz za zadanie znaleźć wartość całki

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,.$$

Mogę podać Ci wartość funkcji f w jednym wybranym przez Ciebie punkcie.

O wartość funkcji w którym punkcie mnie zapytasz i jak na podstawie tej informacji obliczysz wartość całki?

Odpowiedź:

Zapytaj mnie o $f(0)$. Wówczas

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\cdot f(0)\,.$$

117. Pomyślałem sobie jakąś funkcję $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ będącą wielomianem trzeciego stopnia. Nie podam Ci tej funkcji, ale Ty masz za zadanie znaleźć wartość całki

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,.$$

Mogę podać Ci wartości funkcji f w dwóch wybranych przez Ciebie punktach.

O wartości funkcji w których dwóch punktach mnie zapytasz i jak na podstawie tej informacji obliczysz wartość całki?

Odpowiedź:

Zapytaj mnie o $f(\pm 1/\sqrt{3})$. Wówczas

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

118. Podaj wartość całki

$$\int_{-2021}^{2021} x^{2021}\cdot\left(x^{666}+1\right)^{777}\cdot \sin\sin\cos\sin\sin x^{2021}\,dx\,.$$

Odpowiedź:

Całka ma wartość 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

119. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^3}{5k^4+n^4}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^3}{5k^4+n^4}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{(k/n)^3}{5(k/n)^4+1}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,,$$

gdzie $f(x)=\dfrac{x^3}{5x^4+1}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 \frac{x^3}{5x^4+1}\,dx=\frac{1}{20}\cdot\int_0^2 \frac{20x^3}{5x^4+1}\,dx=$$

$$=\left.\frac{\ln(5x^4+1)}{20}\right|_{x=0}^{2}=\frac{\ln 81-\ln 1}{20}=\frac{4\ln 3}{20}=\frac{\ln 3}{5}\,,$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\ln|g(x)|+C\,.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^3}{5k^4+n^4}=\frac{\ln 3}{5}\,.$$

W każdym z kolejnych dziesięciu zadań podaj **w postaci uproszczonej** wartość granicy ciągu.

120. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+k}+\ldots+\frac{1}{6n}\right)=\mathbf{\ln 3}$

121. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+6}+\ldots+\frac{1}{n+2k}+\ldots+\frac{1}{9n}\right)=\mathbf{\ln 3}$

122. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+8}+\frac{1}{n+12}+\ldots+\frac{1}{n+4k}+\ldots+\frac{1}{81n}\right)=\mathbf{\ln 3}$

123. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{k}{n^2+k^2}+\ldots+\frac{7n}{50n^2}\right)=\mathbf{\ln 5}$

124. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{k}{2n^2+k^2}+\ldots+\frac{5n}{27n^2}\right)=\mathbf{\ln 3}$

125. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^2+1}+\frac{2}{3n^2+4}+\ldots+\frac{k}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{3n}{12n^2}\right)=\mathbf{\ln 2}$

126. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\ldots+\frac{n}{n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{2n^2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

127. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{4n^2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{3}}}$ $\left(=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{18}}\right)$

128. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{3\cdot\sqrt{3}}}$ $\left(=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{9}}\right)$

129. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{3}}}$