101. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt{1+\sqrt{x}}$, czyli $x=\left(t^2-1\right)^2$ i formalnie $dx=4\left(t^3-t\right)\,dt$, otrzymujemy

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\int_1^2 \frac{4\left(t^3-t\right)\,dt}{t}=4\cdot\int_1^2 t^2-1\,dt=\frac{4t^3}{3}-4t\Bigg|_{t=1}^{2}=\frac{32}{3}-8-\frac{4}{3}+4=\frac{28}{3}-4=\frac{16}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 16/3.

102. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:
Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}\,, \qquad (*)$$

$$1=(Ax+B)\cdot x^2+C\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)+D\cdot\left(x^2+1\right)\,,$$

$$1=Ax^3+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+D\,,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B+D \\ 0 &= C \\ 1 &= D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=0$ oraz $B=-1$.
Wobec tego

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}=\int_1^{\sqrt{3}} -\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\,dx=-\mathrm{arctg}x-\frac{1}{x}\Bigg|_{x=1}^{\sqrt{3}}=-\mathrm{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{arctg}1+1=$$

$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+1=1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$.

103. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \frac{x^4\,dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonamy podstawienie
$$t=\sqrt[3]{4x^5-3}\,,$$
czyli
$$t^3=4x^5-3$$
oraz formalnie
$$3t^2\,dt=20x^4\,dx\,,$$
zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnąca, a zatem przedziałowi całkowania $x\in[1,\,2]$ odpowiada przedział $t\in[1,\,5]$.

Otrzymujemy
$$\int_1^2\frac{x^4\,dx}{1+\sqrt[3]{4x^5-3}}=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5\frac{t^2\,dt}{1+t}=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5\frac{(t+1)\cdot(t-1)+1}{1+t}\,dt=\frac{3}{20}\cdot\int_1^5 t-1+\frac{1}{1+t}\,dt=$$
$$=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\,\Bigg|_{t=1}^{5}\right)=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{25}{2}-5+\ln6-\frac{1}{2}+1-\ln2\right)=\frac{3}{20}\cdot(8+\ln3)=$$
$$=\frac{6}{5}+\frac{3\cdot\ln3}{20}\,.$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{6}{5}+\frac{3\cdot\ln3}{20}$.

104. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_{-1}^{0}x\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx$$
podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie
$$t=\sqrt[3]{x+1},\qquad x=t^3-1$$
i formalnie
$$dx=3t^2\,dt.$$
Ponadto $x=-1$ odpowiada $t=0$, a $x=0$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[-1,\,0]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,\,1]$.

Otrzymujemy
$$\int_{-1}^{0}x\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int_0^1\left(t^3-1\right)\cdot t\cdot3t^2\,dt=3\cdot\int_0^1 t^6-t^3\,dt=3\cdot\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\,\Bigg|_{t=0}^{1}\right)=$$
$$=3\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)=3\cdot\frac{4-7}{28}=3\cdot\frac{-3}{28}=-\frac{9}{28}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-9/28$.

105. Wskazać takie liczby całkowite dodatnie a i b, że

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2-14x+50}=\frac{\pi}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2-14x+50}=\int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2+1}\,,$$

a następnie wykonujemy podstawienie $t=x-7$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2+1}=\int_{a-7}^{b-7}\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t\Big|_{t=a-7}^{b-7}=\operatorname{arctg}(b-7)-\operatorname{arctg}(a-7)\,.$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{2}\,,$$

skąd wynika, że warunki zadania będą spełnione, jeżeli przyjmiemy $b-7=1$ i $a-7=-1$.

Odpowiedź

Warunki zadania są spełnione przez liczby $a=6$ i $b=8$.

106. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx\,.$$

Stosując podstawienie $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$, czyli $x=t^6-2t^3+1$ i formalnie $dx=6t^5-6t^2\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\,dx=\int_1^{\sqrt[3]{2}} t^2\cdot\left(6t^5-6t^2\right)\,dt=\int_1^{\sqrt[3]{2}} 6t^7-6t^4\,dt=\frac{3t^8}{4}-\frac{6t^5}{5}\Big|_{t=1}^{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{4}-\frac{12\cdot\sqrt[3]{4}}{5}-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}+\frac{9}{20}\,.$$

Stosując podstawienie $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}$, czyli $x=t^6+2t^3+1$ i formalnie $dx=6t^5+6t^2\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{0} t^2\cdot\left(6t^5+6t^2\right)\,dt=\int_{-1}^{0} 6t^7+6t^4\,dt=\frac{3t^8}{4}+\frac{6t^5}{5}\Big|_{t=-1}^{0}=$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}=\frac{9}{20}\,.$$

Ponadto

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x-1}\,dx = \frac{3\cdot(x-1)^{4/3}}{4}\Bigg|_{x=0}^{1} = -\frac{3}{4}$$

W konsekwencji

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}+\frac{9}{20}-\frac{3}{4}+\frac{9}{20}\right) = \frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{10}+\frac{3}{40}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{10}+\frac{3}{40}$.

107. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} = \int_0^2 \frac{6t^5\,dt}{t^3+2t^2} = 6\cdot\int_0^2 \frac{t^3\,dt}{t+2} = 6\cdot\int_0^2 \frac{t^3+8}{t+2}-\frac{8}{t+2}\,dt = 6\cdot\int_0^2 t^2-2t+4-\frac{8}{t+2}\,dt =$$

$$= 2t^3-6t^2+24t-48\ln|t+2|\Bigg|_{t=0}^{2} = 16-24+48-48\ln 4+48\ln 2 = 40-48\ln 2\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $40-48\ln 2$.

108. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2\left(5^x+3\right)\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \log_2\left(5^x+3\right)\,.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot\ln 5}{5^x+3}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot(\ln 5)^2}{5^x+3} - \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^{2x}\cdot(\ln 5)^2}{\left(5^x+3\right)^2} = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{3\cdot 5^x\cdot(\ln 5)^2}{\left(5^x+3\right)^2} > 0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła.

Ponieważ $f(1)=3$ oraz $f(3)=7$, wykres funkcji f leży poniżej cięciwy o końcach $(1,3)$ i $(3,7)$. Wobec tego $f(x)<2x+1$ dla $x\in(1,3)$ i w konsekwencji

$$\int_1^3 \log_2(5^x+3)\,dx<\int_1^3 2x+1\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

109. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{10}^{12} \sqrt[3]{x^2+4}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Wskazówka: Tym razem zamiast cięciwy rozważyć odpowiednią styczną do wykresu funkcji podcałkowej.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-2/3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-2/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=\frac{2x^2+8}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{6x^2+24-8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=\frac{24-2x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}\quad<\quad0\,,\qquad\text{o ile}\qquad x^2>12\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt{12},+\infty\right)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[10,12]$.

Ponieważ $f(11)=5$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży poniżej[1] stycznej do wykresu w punkcie $(11,5)$. Wobec tego

$$f(x)<5+f'(11)\cdot(x-11)\qquad\text{dla}\qquad x\in(10,12)$$

i w konsekwencji

$$\int_{10}^{12}\sqrt[3]{x^2+4}\,dx<\int_{10}^{12}5+f'(11)\cdot(x-11)\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

[1]Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie poniżej niej.

Uwaga 1: Bez trudu można wyliczyć, że $f'(11)=22/75$ i wstawić tę wartość do wzorów występujących w rozwiązaniu, ale jest to całkiem zbyteczne z matematycznego punktu widzenia. Może to być jednak wskazane ze względów medycznych (większy komfort psychiczny osoby rozwiązującej zadanie).

Uwaga 2: Przy pomocy komputera można wyliczyć, że wartość podanej całki jest w przybliżeniu równa $9,9974$.

110. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2+11}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 6.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+11}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-2/3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-2/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{2x^2+22}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=\frac{6x^2+66-8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{-2x^2+66}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=\left(33-x^2\right)\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}\;>\;0\,,\qquad \text{o ile}\qquad x^2<33\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\left[-\sqrt{33},\,\sqrt{33}\right]$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[3,\,5]$.

Ponieważ $f(4)=3$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej[2] stycznej do wykresu w punkcie $(4,\,3)$. Wobec tego

$$f(x)>3+f'(4)\cdot(x-4)\qquad \text{dla}\qquad x\in(3,\,5)$$

i w konsekwencji

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2+11}\,dx>\int_3^5 3+f'(4)\cdot(x-4)\,dx=6\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 6.

Uwaga: Faktycznie podana całka ma wartość w przybliżeniu równą 6,005.

[2]Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie powyżej niej.

111. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int\limits_7^8 \sqrt[3]{x^2+15}\,dx \approx \mathbf{4,146}$$

jest mniejsza czy większa od $199/48 \approx \mathbf{4,146}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+15}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\left(x^2+15\right)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot\left(x^2+15\right)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+15\right)^{5/3}}=\frac{6\cdot\left(x^2+15\right)}{9\cdot\left(x^2+15\right)^{5/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+15\right)^{5/3}}=$$

$$\frac{6x^2+6\cdot 15-8x^2}{9\cdot\left(x^2+15\right)^{5/3}}=\frac{-2x^2+90}{9\cdot\left(x^2+15\right)^{5/3}}=\frac{2\cdot\left(-x^2+45\right)}{9\cdot\left(x^2+15\right)^{5/3}}<0$$

dla $x>\sqrt{45}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt{45},\,\infty\right)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[7,8]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>7$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 7. Ponieważ $f(7)=4$ oraz $f'(7)=7/24$, dla $x>7$ zachodzi nierówność

$$f(x)<4+\frac{7(x-7)}{24}$$

i w konsekwencji

$$\int\limits_7^8 \sqrt[3]{x^2+15}\,dx<\int\limits_7^8 4+\frac{7(x-7)}{24}\,dx=4+\frac{7}{48}=\frac{199}{48}\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od $199/48$.

112. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int\limits_6^8 \sqrt{x^3-54}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 34.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt{x^3-54}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{3x^2}{2}\cdot\left(x^3-54\right)^{-1/2}$$

oraz

$$f''(x)=3x\cdot\left(x^3-54\right)^{-1/2}-\frac{9x^4}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}=$$

$$=\frac{12x^4-648x}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}-\frac{9x^4}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}=\frac{12x^4-648x-9x^4}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}=$$

$$=\frac{3x^4-648x}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}=\frac{3x\cdot(x^3-216)}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2} \quad > \quad 0\,, \qquad \text{o ile} \qquad x^3>216\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $[6, +\infty)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[6, 8]$.

Ponieważ $f(7)=17$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej[3] stycznej do wykresu w punkcie $(7, 17)$. Wobec tego

$$f(x)>17+f'(7)\cdot(x-7) \qquad \text{dla} \qquad x\in(6, 8)$$

i w konsekwencji

$$\int_6^8 \sqrt{x^3-54}\,dx>\int_6^8 17+f'(7)\cdot(x-7)\,dx=34\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 34.

Uwaga: Bez trudu można wyliczyć, że $f'(7)=147/34$ i wstawić tę wartość do wzorów występujących w rozwiązaniu, ale jest to zbyteczne, gdyż ta wartość nie ma wpływu na otrzymane oszacowanie.

[3]Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie powyżej niej.