W każdym z poniższych 21 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. **Wskazówka:** W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

66. $\int\limits_{2017}^{2020} 7\,dx = \mathbf{21}$ **67.** $\int\limits_{0}^{3} x^2\,dx = \mathbf{9}$ **68.** $\int\limits_{0}^{2} x^3\,dx = \mathbf{4}$ **69.** $\int\limits_{0}^{1} x^{10}\,dx = \mathbf{1/11}$

70. $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx = \mathbf{14/3}$ **71.** $\int\limits_{1}^{27} \sqrt[3]{x}\,dx = \mathbf{60}$ **72.** $\int\limits_{-2}^{10} |x|\,dx = \mathbf{52}$ **73.** $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x} = \mathbf{\ln 3}$

74. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x+1} = \mathbf{\ln 2}$ **75.** $\int\limits_{1}^{7} \frac{dx}{x+2} = \mathbf{\ln 3}$ **76.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$ **77.** $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$

78. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$ **79.** $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$ **80.** $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

81. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ **82.** $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$ **83.** $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$

84. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$ **85.** $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$ **86.** $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$

87. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int\limits_{1}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+24}}\,.$$

Rozwiązanie:

Po skorzystaniu ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\int\limits_{1}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+24}} = \int\limits_{1}^{25} \frac{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}{24}\,dx = \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(x+24)^{3/2}-\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right)\Bigg|_{x=1}^{25} =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\left((x+24)^{3/2}-x^{3/2}\right)\Bigg|_{x=1}^{25} = \frac{1}{36}\cdot(343-125-125+1) = \frac{94}{36} = \frac{47}{18}\,.$$

88. Udowodnić nierówność
$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x}\,dx < \frac{1}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Pochodna funkcji podcałkowej $f(x)=x^{2x}$ dana jest wzorem
$$f'(x)=\frac{d}{dx}x^{2x}=\frac{d}{dx}e^{2x\cdot\ln x}=e^{2x\cdot\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(2x\cdot\ln x)=x^{2x}\cdot(2\cdot\ln x+2)=2\cdot x^{2x}\cdot(\ln x+1)\ .$$
Ponieważ $f'(x)>0$ dla $x>1/e$ oraz $f'(x)<0$ dla $0<x<1/e$, funkcja f jest malejąca w przedziale $(0,\,1/e)$ i rosnąca w przedziale $(1/e,\,+\infty)$. Zauważmy ponadto, że
$$f(1/4)=1/2$$
oraz
$$f(1/2)=1/2\,.$$
Wobec tego $f(x)<1/2$ dla $x\in(1/4,\,1/2)$, skąd
$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x}\,dx < \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\,.$$

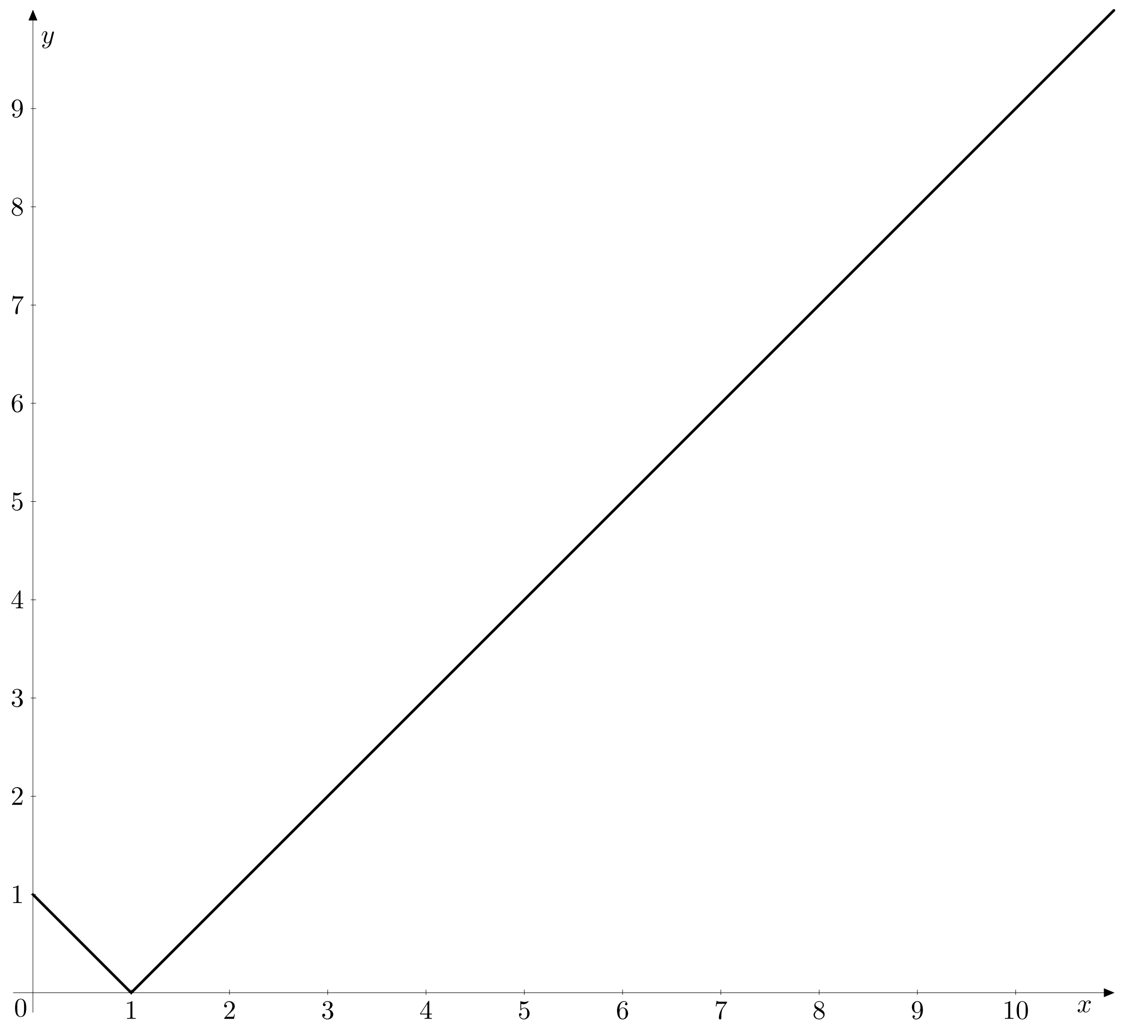
Uwaga: Obliczenia komputerowe pokazują, że dana w zadaniu całka ma wartość w przybliżeniu 0,1215. Wydaje się to być zbyt bliskie oszacowaniu $1/8=0,125$, aby zadziałały inne metody szacowania (zapewne obarczone większym błędem).

89. Niech $f_1(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ oraz $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$. Obliczyć wartość całki oznaczonej

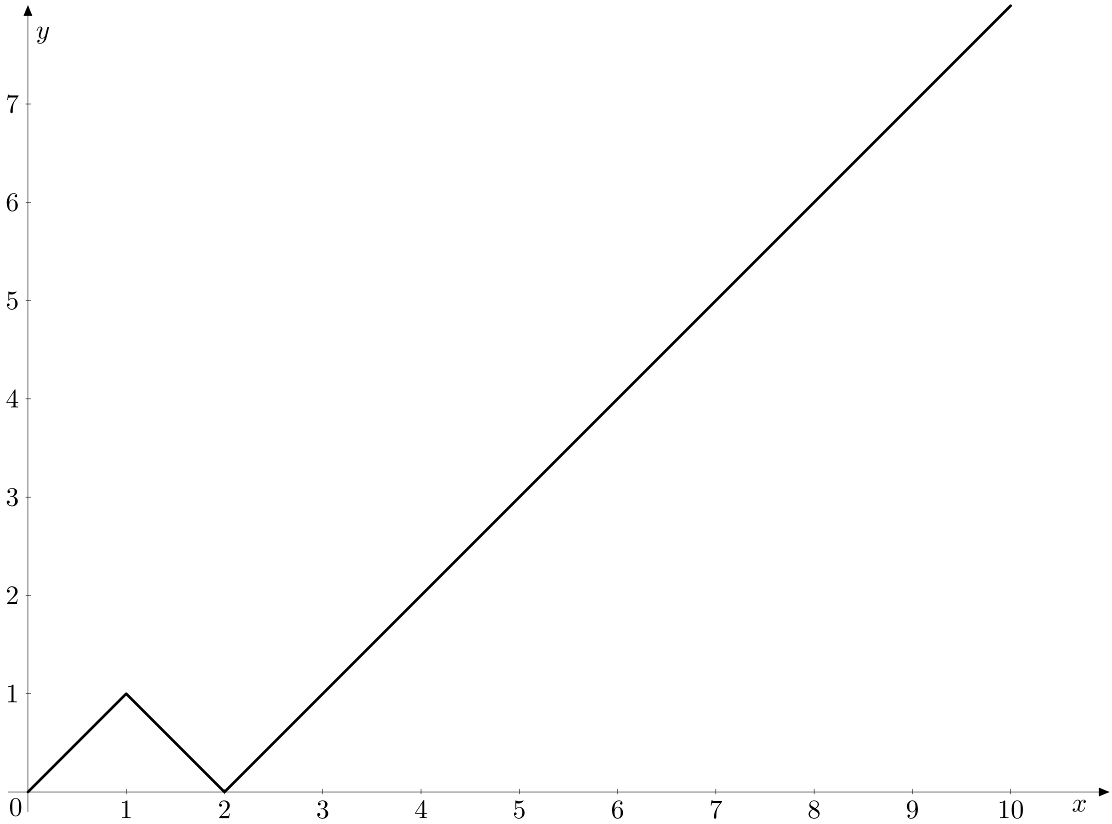
$$\int_0^{10} f_5(x)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

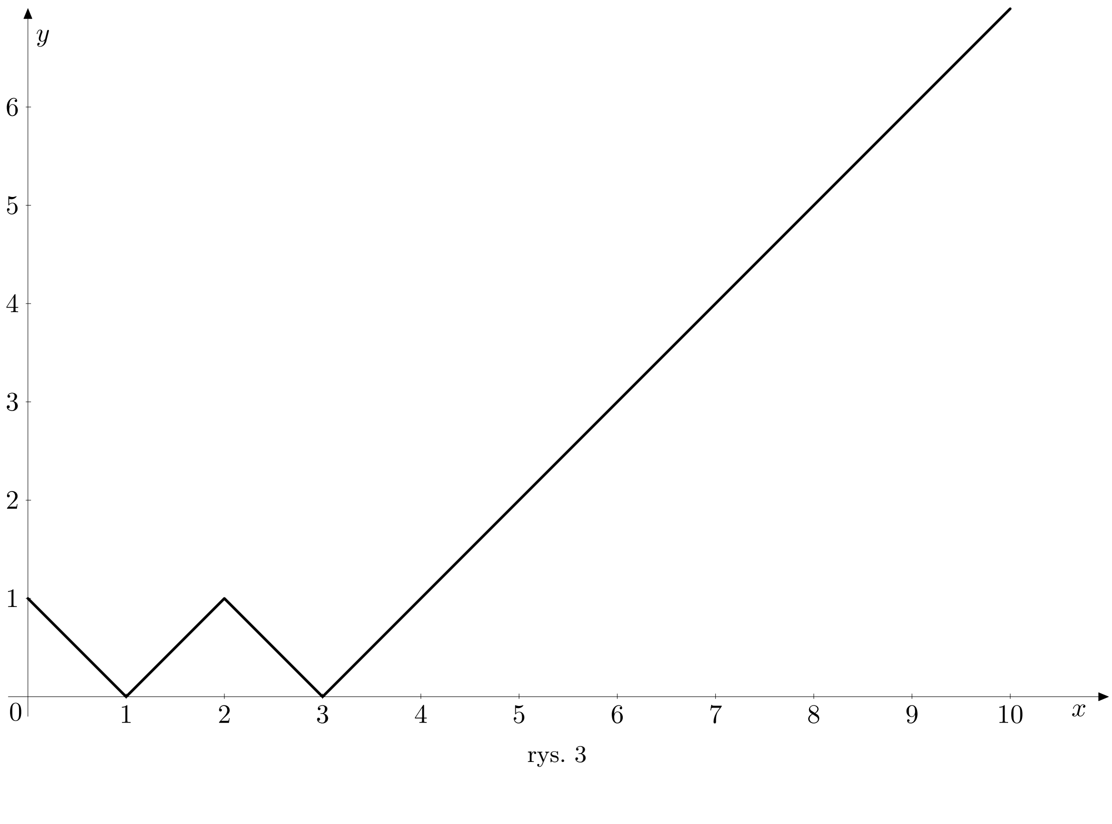
Zauważmy, że $f_1(x)=|x-1|$. W związku z tym wykres funkcji $f_1\circ g$ powstaje z wykresu funkcji g przez przesunięcie tegoż wykresu w dół o 1 oraz symetryczne odbicie części wykresu, która znalazła się pod osią OX. Wykresy funkcji od f_1 do f_5 znajdują się odpowiednio na rysunkach od 1 do 5.



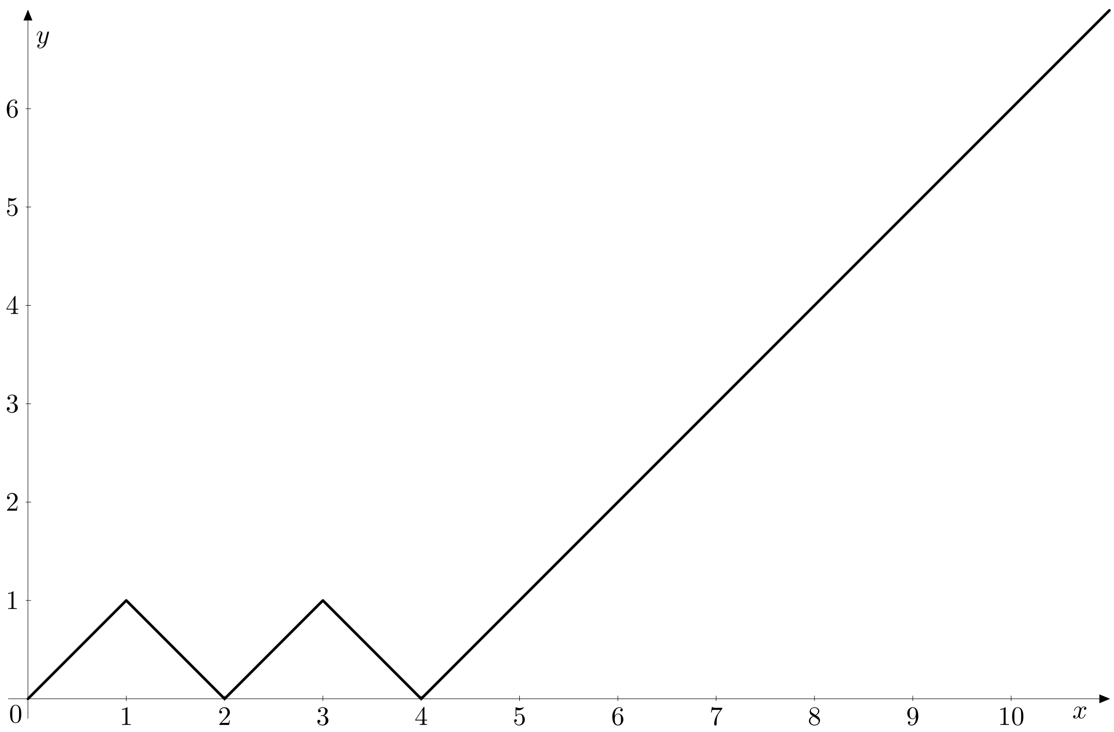
rys. 1



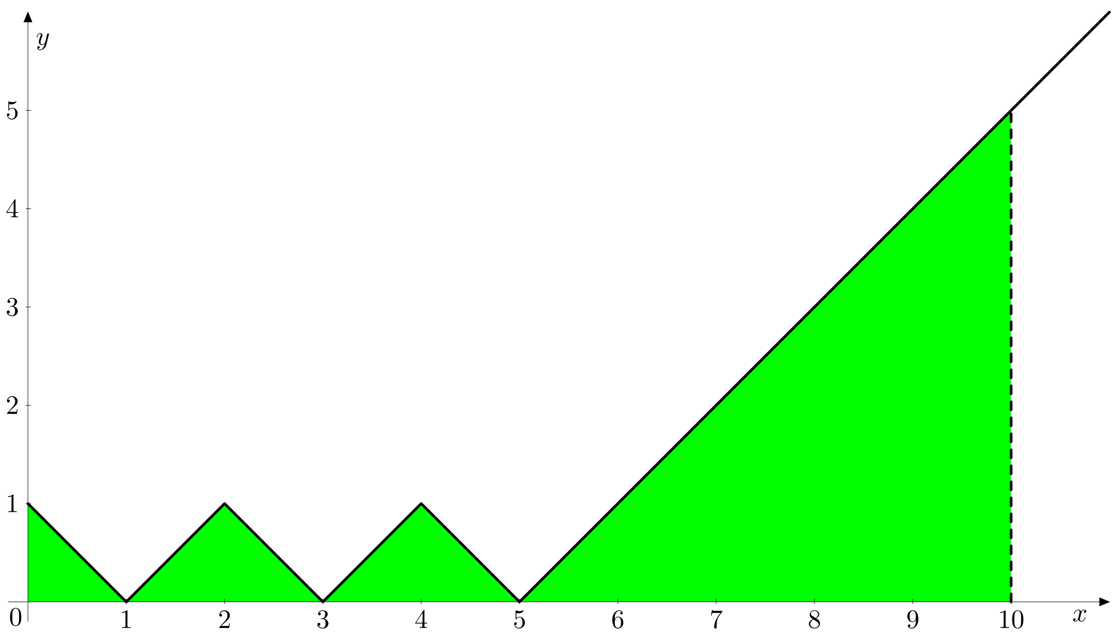
rys. 2



rys. 3



rys. 4



rys. 5

Szukana wartość całki oznaczonej jest równa polu zielonej figury z rysunku 5. Pole to wyliczamy sumując pola trójkątów, które się na nie składają:

$$\frac{1}{2}+1+1+\frac{25}{2}=15\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa 15.

90. Udowodnić nierówność

$$\int_1^3 \sqrt[3]{7x^2+1}\,dx > 6\,.$$

Wskazówka: Zbadać wypukłość funkcji podcałkowej lub przynajmniej zastanowić się nad położeniem jej wykresu względem odpowiedniej cięciwy.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Pochodna funkcji podcałkowej $f(x)=\sqrt[3]{7x^2+1}$ dana jest wzorem

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-2/3}\cdot 14x=\frac{14}{3}\cdot x\cdot\left(7x^2+1\right)^{-2/3}\,,$$

a pochodna drugiego rzędu jest równa

$$f''(x)=\frac{14}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-2/3}+\frac{14}{3}\cdot x\cdot\frac{-2}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}\cdot 14x=$$

$$=\frac{14}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-2/3}-\frac{392}{9}\cdot x^2\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{14}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}\cdot\left(7x^2+1\right)-\frac{392}{9}\cdot x^2\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}=$$

$$=\left(\frac{14}{3}\cdot\left(7x^2+1\right)-\frac{392}{9}\cdot x^2\right)\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}=$$

$$=\left(3\cdot\left(7x^2+1\right)-28\cdot x^2\right)\cdot\frac{14}{9}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}=\left(3-7\cdot x^2\right)\cdot\frac{14}{9}\cdot\left(7x^2+1\right)^{-5/3}\,,$$

co jest ujemne dla $x\geqslant 1$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $[1\,,+\infty)$, a więc jej wykres leży nad cięciwą łączącą punkty wykresu odpowiadające $x=1$ i $x=3$. Ponieważ cięciwa ta ma równanie $y=x+1$, otrzymujemy nierówność

$$\sqrt[3]{7x^2+1}>x+1 \tag{1}$$

spełnioną dla $x\in(1,\,3)$. Wobec tego

$$\int_1^3 \sqrt[3]{7x^2+1}\,dx>\int_1^3 x+1\,dx=\left.\frac{x^2}{2}+x\right|_{x=1}^{3}=\frac{9}{2}+3-\frac{1}{2}-1=6\,.$$

Uwaga:

Wartość całki $\int_1^3 x+1\,dx$ można podać bez całkowania korzystając z następującej reguły: Całka oznaczona z funkcji liniowej jest iloczynem długości przedziału całkowania przez wartość funkcji podcałkowej w środku przedziału całkowania.

Sposób II:

Postępujemy jak w Sposobie I, przy czym nierówność (1) dowodzimy bezpośrednio przekształcając ją do postaci równoważnych:

$$7x^2+1>(x+1)^3\,,$$

$$7x^2+1>x^3+3x^2+3x+1\,,$$

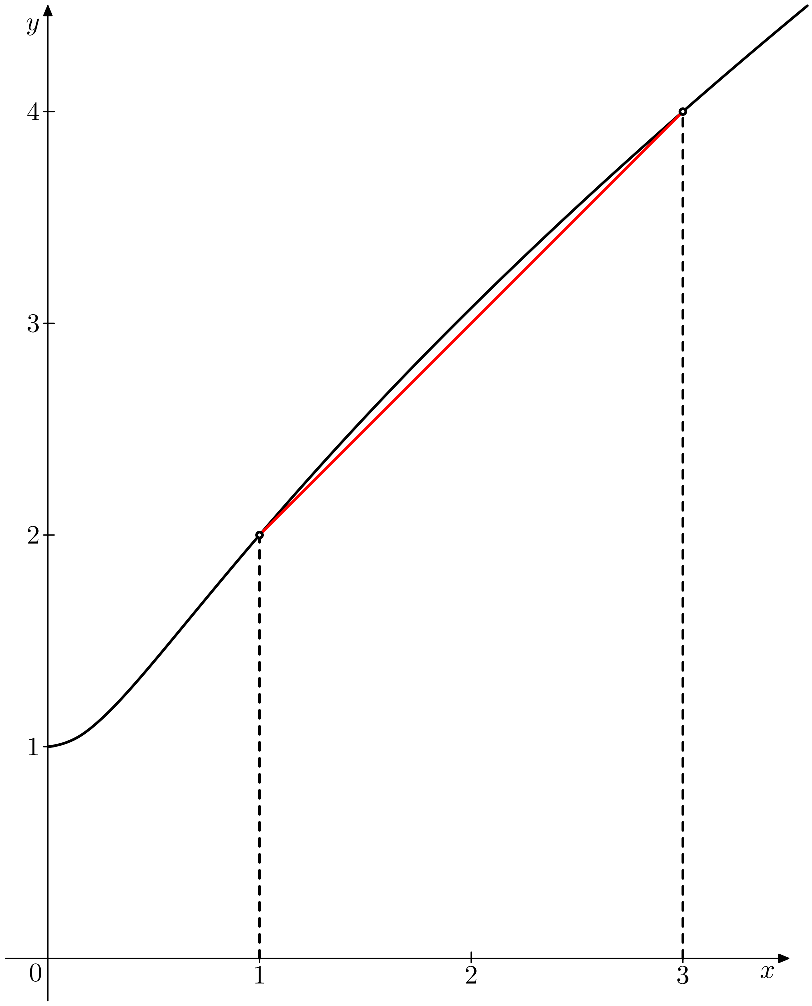
$$0>x^3-4x^2+3x\,,$$

$$0 > x \cdot (x-1) \cdot (x-3),$$

co jest prawdziwe dla $x \in (1, 3)$.

Uwaga:

Wartość szacowanej całki jest mniejsza od 6,1. Oznacza to, że w rozwiązaniu nie możemy sobie pozwolić na zbyt grube oszacowania. Na rysunku 6 przedstawiony jest wykres[1] funkcji f wraz z jej cięciwą[2] użytą do oszacowania całki.



rys. 6

[1]Czarna linia.
[2]Czerwona linia.