

Kolokwium nr 2 (wtorek 23 marca 2021): materiał zadań 1–100.

11:15-11:55 – quiz na Moodlu (40 minut)

12:00-12:20 – zadanie otwarte (20 minut)

12:30-13:45 – wykład (75 minut)

Przed rozpoczęciem kolokwium należy dołączyć do spotkania w Teamsach na kanale wykładu i włączyć kamerę.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 18.03.2021.**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.**

W każdym z poniższych 21 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. **Wskazówka:** W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

$$66. \int_{2017}^{2020} 7 dx \dots\dots \quad 67. \int_0^3 x^2 dx \dots\dots \quad 68. \int_0^2 x^3 dx \dots\dots \quad 69. \int_0^1 x^{10} dx \dots\dots$$

$$70. \int_1^4 \sqrt{x} dx \dots\dots \quad 71. \int_1^{27} \sqrt[3]{x} dx \dots\dots \quad 72. \int_{-2}^{10} |x| dx \dots\dots \quad 73. \int_1^3 \frac{dx}{x} \dots\dots$$

$$74. \int_1^3 \frac{dx}{x+1} \dots\dots \quad 75. \int_1^7 \frac{dx}{x+2} \dots\dots \quad 76. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots \quad 77. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots$$

$$78. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots \quad 79. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots \quad 80. \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots$$

$$81. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \dots\dots \quad 82. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \dots\dots \quad 83. \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx \dots\dots$$

$$84. \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \dots\dots \quad 85. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \dots\dots \quad 86. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx \dots\dots$$

87. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}}.$$

88. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \frac{1}{8}.$$

89. Niech $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ oraz $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{10} f_5(x) dx.$$

90. Udowodnić nierówność

$$\int_1^3 \sqrt[3]{7x^2 + 1} dx > 6.$$

Wskazówka: Zbadać wypukłość funkcji podcałkowej lub przynajmniej zastanowić się nad położeniem jej wykresu względem odpowiedniej cięciwy.

Udowodnić następujące nierówności:

$$91. \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx < \frac{1}{2}$$

$$92. \frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x + \sin x} < \frac{1}{8}$$

$$93. \int_{-1}^2 \frac{|x|}{1 + x^2} dx < \frac{3}{2}$$

$$94. \int_0^1 x \cdot (1 - x^{99+x}) dx < \frac{1}{2}$$

$$95. 5 < \int_1^3 x^x dx < 31$$

$$96. \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$$

$$97. 2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx$$

$$98. \frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}. \quad \text{Wsk.: Oszacować } x^x \text{ przez } x^a.$$

99. Niech

$$C(a, b) = \left[\int_a^b \log_x 2 dx \right],$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y . Obliczyć wartości wyrażeń:

a) $C(80, 122)$

b) $C(200, 240)$

c) $C(400, 440)$

d) $C(800, 880)$

100. Dla podanej liczby a wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby zachodziła równość

$$\int_a^b \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{\ln 5}{2}.$$

a) $a = 0$

b) $a = 1$

c) $a = 2$

d) $a = 3$