51. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x+2}{x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny): Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{x+2}{x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{x+4}\,,$$

$$\begin{aligned} x+2 &= A\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4) &+& B\cdot x\cdot(x+3)\cdot(x+4) &+ \\ &+ D\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+4) &+& E\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (1), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (1) kolejno $x=0$, -1, -3, -4. Otrzymujemy:

dla $x=0$ $\quad 2=12A$, skąd $A=1/6$,

dla $x=-1$ $\quad 1=-6B$, skąd $B=-1/6$,

dla $x=-3$ $\quad -1=6D$, skąd $D=-1/6$,

dla $x=-4$ $\quad -2=-12E$, skąd $E=1/6$.

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{x+2}{x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)}\,dx=\frac{1}{6}\cdot\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\,dx=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot(\ln|x|-\ln|x+1|-\ln|x+3|+\ln|x+4|)+C\,.$$

Sposób II (trikowy): Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{x+2}{x\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+4)}\,dx=\int \frac{x+2}{\big(x\cdot(x+4)\big)\cdot\big((x+1)\cdot(x+3)\big)}\,dx=$$
$$=\int \frac{x+2}{(x^2+4x)\cdot(x^2+4x+3)}\,dx\,,$$

a następnie podstawiamy $t=x^2+4x$ i formalnie $dt=2(x+2)\,dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4x)\cdot(x^2+4x+3)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t\cdot(t+3)}\,.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t\cdot(t+3)}=\frac{1/3}{t}-\frac{1/3}{t+3}\,,$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t\cdot(t+3)}=\frac{1}{6}\cdot\int \frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\,dt=\frac{1}{6}\cdot(\ln|t|-\ln|t+3|)+C=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\Big(\ln\left|x^2+4x\right|-\ln\left|x^2+4x+3\right|\Big)+C\,.$$

52. Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+40}\,.$$
Rozwiązanie:
Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+2$ oraz $t=y/6$:
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+40}=\int \frac{dx}{(x+2)^2+36}=\int \frac{dy}{y^2+36}=\int \frac{dy}{36(y/6)^2+36}=\int \frac{6\,dt}{36t^2+36}=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\operatorname{arctg}t}{6}+C=\frac{\operatorname{arctg}(y/6)}{6}+C=\frac{\operatorname{arctg}((x+2)/6)}{6}+C\,.$$

53. Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx\,.$$
Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx=\int \frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5\,dt=6\cdot\int \frac{t^8\,dt}{t^2+1}=6\cdot\int \frac{(t^8-1)+1}{t^2+1}dt=6\cdot\int t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}dt=$$
$$=\frac{6t^7}{7}-\frac{6t^5}{5}+2t^3-6t+6\cdot\operatorname{arctg}t+C=\frac{6x^{7/6}}{7}-\frac{6x^{5/6}}{5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\cdot\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C\,.$$

54. Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,.$$
Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\cdot\int \frac{t^3\,dt}{t+1}=6\cdot\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt=6\cdot\int t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\,dt=$$
$$=2t^3-3t^2+6t-6\cdot\ln|t+1|+C=2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\cdot\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C\,.$$

55. Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,.$$
Rozwiązanie:
Wykonujemy podstawienie
$$t=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\,,$$
co daje
$$t^2=1+\sqrt{1+x}\,,$$
$$t^2-1=\sqrt{1+x}\,,$$
$$\left(t^2-1\right)^2=1+x\,,$$

$$\left(t^2-1\right)^2-1=x\,,$$
$$t^4-2t^2=x$$

i formalnie

$$4\cdot\left(t^3-t\right)\,dt=dx\,.$$

Otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}=\int\frac{4\cdot(t^3-t)\,dt}{1+t}=4\cdot\int t^2-t\,dt=\frac{4t^3}{3}-2t^2+C=$$
$$=\frac{4\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^3}{3}-2\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^2+C=\frac{4\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^3}{3}-2-2\sqrt{1+x}+C=$$
$$=\frac{4\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^3}{3}-2\sqrt{1+x}+C_2\,.$$

56. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie

$$t=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,,$$

skąd kolejno

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=t^2-1\,,$$
$$\sqrt{1+x}=\left(t^2-1\right)^2-1=t^4-2t^2\,,$$
$$x=\left(t^4-2t^2\right)^2-1=t^8-4t^6+4t^4-1$$

i formalnie

$$dx=8t^7-24t^5+16t^3\,dt\,,$$

otrzymujemy:

$$\int\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,dx=\int t\cdot\left(8t^7-24t^5+16t^3\right)\,dt=\int 8t^8-24t^6+16t^4\,dt=$$
$$=\frac{8t^9}{9}-\frac{24t^7}{7}+\frac{16t^5}{5}+C=$$
$$=\frac{8}{9}\cdot\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^{9/2}-\frac{24}{7}\cdot\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^{7/2}+\frac{16}{5}\cdot\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)^{5/2}+C\,.$$

57. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$J(x)=\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx\,.$$

Sprawdzić, że $J(1)=J(-1)+\frac{33\sqrt[3]{2}}{70}$, a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.

Rozwiązanie:

Sposób I

Dwukrotnie całkujemy przez części:

$$J(x)=\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=x^2\cdot\frac{3\cdot(x+1)^{4/3}}{4}-\frac{3}{2}\cdot\int x\cdot(x+1)^{4/3}\,dx=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot x^2\cdot(x+1)^{4/3}-\frac{3}{2}\cdot x\cdot\frac{3\cdot(x+1)^{7/3}}{7}+\frac{9}{14}\cdot\int(x+1)^{7/3}\,dx=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot x^2\cdot(x+1)^{4/3}-\frac{9}{14}\cdot x\cdot(x+1)^{7/3}+\frac{27}{140}\cdot(x+1)^{10/3}+C\,.$$

Sprawdzenie:

$$J(-1)=C\,,$$

$$J(1)=\frac{3}{4}\cdot2\sqrt[3]{2}-\frac{9}{14}\cdot4\sqrt[3]{2}+\frac{27}{140}\cdot8\sqrt[3]{2}+C=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{18}{7}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{54}{35}\cdot\sqrt[3]{2}+C=$$

$$=\frac{105}{70}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{180}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{108}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=\frac{105-180+108}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=$$

$$=\frac{33}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=J(-1)+\frac{33\sqrt[3]{2}}{70}\,.$$

Sposób II

Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt[3]{x+1}$, czyli $x=t^3-1$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$:

$$J(x)=\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int\left(t^3-1\right)^2\cdot t\cdot3t^2\,dt=3\cdot\int t^9-2t^6+t^3\,dt=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot t^{10}-\frac{6}{7}\cdot t^7+\frac{3}{4}\cdot t^4+C=\frac{3}{10}\cdot(x+1)^{10/3}-\frac{6}{7}\cdot(x+1)^{7/3}+\frac{3}{4}\cdot(x+1)^{4/3}+C\,.$$

Sprawdzenie:

$$J(-1)=C\,,$$

$$J(1)=\frac{3}{10}\cdot8\sqrt[3]{2}-\frac{6}{7}\cdot4\sqrt[3]{2}+\frac{3}{4}\cdot2\sqrt[3]{2}+C=\frac{12}{5}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{24}{7}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2}+C=$$

$$=\frac{168}{70}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{240}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{105}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=\frac{168-240+105}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=$$

$$=\frac{33}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=J(-1)+\frac{33\sqrt[3]{2}}{70}\,.$$

Sposób III

Wykonujemy podstawienie $t=x+1$, czyli $x=t-1$ i formalnie $dx=dt$:

$$J(x)=\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int(t-1)^2\cdot\sqrt[3]{t}\,dt=\int t^{7/3}-2t^{4/3}+t^{1/3}\,dt=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot t^{10/3}-\frac{6}{7}\cdot t^{7/3}+\frac{3}{4}\cdot t^{4/3}+C=\frac{3}{10}\cdot(x+1)^{10/3}-\frac{6}{7}\cdot(x+1)^{7/3}+\frac{3}{4}\cdot(x+1)^{4/3}+C\,.$$

Sprawdzenie jak w sposobie II.

58. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dwukrotnie całkujemy przez części:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx=\int x^2\cdot(x+2)^{-1/3}\,dx=x^2\cdot\frac{3\cdot(x+2)^{2/3}}{2}-3\cdot\int x\cdot(x+2)^{2/3}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(x+2)^{2/3}-3\cdot x\cdot\frac{3\cdot(x+2)^{5/3}}{5}+\frac{9}{5}\cdot\int(x+2)^{5/3}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(x+2)^{2/3}-\frac{9}{5}\cdot x\cdot(x+2)^{5/3}+\frac{27}{40}\cdot(x+2)^{8/3}+C\,.$$

Uwagi:

Daną w zadaniu całkę można również obliczyć całkując przez podstawienie $t=x+2$ lub $t=\sqrt[3]{x+2}$.

Całkowanie przez podstawienie musi prowadzić do tego samego wyniku, ale może być on w innej postaci – dopiero po wykonaniu odpowiednich przekształceń można stwierdzić zgodność obydwu odpowiedzi.

59. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy podaną całkę

$$\int\sqrt[3]{8x^{17}+x^{12}}\,dx=\int x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx$$

i wykonujemy podstawienie $t=8x^5+1$ oraz formalnie $dt=40x^4\,dx$. Otrzymujemy

$$\int x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx=\frac{1}{40}\cdot\int 40x^4\cdot\sqrt[3]{8x^5+1}\,dx=\frac{1}{40}\cdot\int\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{1}{40}\cdot\frac{3\cdot t^{4/3}}{4}+C=$$

$$=\frac{3\cdot t^{4/3}}{160}+C=\frac{3\cdot\left(8x^5+1\right)^{4/3}}{160}+C\,.$$

60. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\ln\left(x^2+1\right)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\ln(x^2+1)$. Otrzymujemy:

$$\int\ln\left(x^2+1\right)\,dx=\int 1\cdot\ln\left(x^2+1\right)\,dx=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-\int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx=$$

$$=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2\int dx+2\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=x\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\mathrm{arctg}x+C\,.$$

61. Sprowadzić całkę
$$I_n=\int\frac{dx}{(x^8+1)^n}$$
do całki I_{n-1}. Liczba całkowita n jest większa od 1.

Wskazówka: $1=x^8+1-x\cdot x^7$.

Rozwiązanie:

Przekształcenie i całkowanie przez części prowadzi do:
$$I_n=\int\frac{dx}{(x^8+1)^n}=\int\frac{x^8+1-x^8}{(x^8+1)^n}\,dx=\int\frac{x^8+1}{(x^8+1)^n}\,dx-\int x\cdot\frac{x^7}{(x^8+1)^n}\,dx=$$
$$=I_{n-1}-x\cdot\frac{-1}{8(n-1)\cdot(x^8+1)^{n-1}}+\int\frac{-1}{8(n-1)\cdot(x^8+1)^{n-1}}\,dx=$$
$$=I_{n-1}+\frac{x}{8(n-1)\cdot(x^8+1)^{n-1}}-\frac{1}{8(n-1)}\cdot I_{n-1}=\frac{8n-9}{8n-8}\cdot I_{n-1}+\frac{x}{8(n-1)\cdot(x^8+1)^{n-1}}\,.$$

62. Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{-x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}}\,dx\,.$$

Wskazówka: Wolno skorzystać ze wzoru $\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C$

Rozwiązanie:

Przepisujemy daną całkę w postaci
$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{-x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}}\,dx=\int\frac{2x+3}{\sqrt{-\big(x\cdot(x+3)\big)\cdot\big((x+1)\cdot(x+2)\big)}}\,dx=$$
$$=\int\frac{2x+3}{\sqrt{-\left(x^2+3x\right)\cdot\left(x^2+3x+2\right)}}\,dx\,,$$
a następnie podstawiamy $t=x^2+3x+1$ i formalnie $dt=(2x+3)\,dx$. Otrzymujemy
$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{-\left(x^2+3x\right)\cdot\left(x^2+3x+2\right)}}\,dx=\int\frac{2x+3}{\sqrt{-\left(x^2+3x+1-1\right)\cdot\left(x^2+3x+1+1\right)}}\,dx=$$
$$=\int\frac{dt}{\sqrt{-(t-1)\cdot(t+1)}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-\left(t^2-1\right)}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=$$
$$=\arcsin\left(x^2+3x+1\right)+C\,.$$

63. Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{2x^3-65x}{(x-8)\cdot(x-7)\cdot(x-4)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+4)\cdot(x+7)\cdot(x+8)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy daną całkę w postaci
$$\int \frac{2x^3-65x}{(x-8)\cdot(x-7)\cdot(x-4)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+4)\cdot(x+7)\cdot(x+8)}\,dx=$$
$$=\int \frac{2x^3-65x}{(x^2-64)\cdot(x^2-49)\cdot(x^2-16)\cdot(x^2-1)}\,dx=$$
$$=\int \frac{2x^3-65x}{(x^2-64)\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-49)\cdot(x^2-16)}\,dx=\int \frac{2x^3-65x}{(x^4-65x^2+64)\cdot(x^4-65x^2+784)}\,dx\,,$$
a następnie podstawiamy $t=x^4-65x^2+64$ i formalnie $dt=2\,(2x^3-65x)\,dx$. Otrzymujemy
$$\int \frac{x+2}{(x^4-65x^2+64)\cdot(x^4-65x^2+784)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t\cdot(t+720)}\,.$$
Rozkład na ułamki proste prowadzi do
$$\frac{1}{t\cdot(t+720)}=\frac{1/720}{t}-\frac{1/720}{t+720}\,,$$
co pozwala dokończyć obliczenia:
$$\frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t\cdot(t+720)}=\frac{1}{1440}\cdot\int \frac{1}{t}-\frac{1}{t+720}\,dt=\frac{1}{1440}\cdot(\ln|t|-\ln|t+720|)+C=$$
$$=\frac{1}{1440}\cdot\left(\ln\left|x^4-65x^2+64\right|-\ln\left|x^4-65x^2+784\right|\right)+C\,.$$

Inna postać odpowiedzi:
$$\frac{1}{1440}\cdot\left(\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|x^2-64\right|-\ln\left|x^2-16\right|-\ln\left|x^2-49\right|\right)+C\,.$$

Jeszcze inna postać odpowiedzi:
$$\frac{1}{1440}\cdot(\ln|x-1|+\ln|x+1|+\ln|x-8|+\ln|x+8|-$$
$$-\ln|x-4|-\ln|x+4|-\ln|x-7|-\ln|x+7|)+C\,.$$

I jeszcze taka postać odpowiedzi:
$$\frac{1}{1440}\cdot\ln\left|\frac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-8)\cdot(x+8)}{(x-4)\cdot(x+4)\cdot(x-7)\cdot(x+7)}\right|+C\,.$$

64. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^8+x}\,.$$

Wskazówka: Przemnożyć licznik i mianownik przez x^6.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci

$$\int \frac{dx}{x^8+x} = \int \frac{x^6\,dx}{x^{14}+x^7}$$

nasuwa pomysł podstawienia $t=x^7$ i formalnie $dt=7x^6\,dx$, co prowadzi do

$$\int \frac{x^6\,dx}{x^{14}+x^7} = \frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{t^2+t} = \frac{1}{7}\cdot\int \frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{7}\cdot(\ln|t|-\ln|t+1|)+C =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\ln\left|x^7\right|-\ln\left|x^7+1\right|\right)+C = \ln|x| - \frac{\ln|x^7+1|}{7}+C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $x=t^{-1/7}$ i formalnie $dx=-\frac{dt}{7t^{8/7}}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^8+x} = -\frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{\left(t^{-8/7}+t^{-1/7}\right)\cdot t^{8/7}} = -\frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{7}\cdot\ln|t+1|+C =$$

$$= -\frac{1}{7}\cdot\ln\left|x^{-7}+1\right|+C = -\frac{1}{7}\cdot\ln\left|\frac{x^7+1}{x^7}\right|+C = \frac{1}{7}\cdot\ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right|+C\,.$$

65. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{15x^4-1}{\left(x^4+1\right)^5}\,dx\,.$$

Wskazówka: $15x^4-1=16\cdot x\cdot x^3-x^4-1$

Rozwiązanie:

Przekształcenie i całkowanie przez części prowadzi do:

$$\int \frac{15x^4-1}{\left(x^4+1\right)^5}\,dx = \int \frac{16x^4-x^4-1}{\left(x^4+1\right)^5}\,dx = 16\cdot\int \frac{x^4}{\left(x^4+1\right)^5}\,dx - \int \frac{x^4+1}{\left(x^4+1\right)^5}\,dx =$$

$$= 16\cdot\int x\cdot\frac{x^3}{\left(x^4+1\right)^5}\,dx - \int \frac{dx}{\left(x^4+1\right)^4} =$$

$$= 16\cdot x\cdot\frac{-1}{16\cdot\left(x^4+1\right)^4} - 16\cdot\int 1\cdot\frac{-1}{16\cdot\left(x^4+1\right)^4}\,dx - \int \frac{dx}{\left(x^4+1\right)^4} =$$

$$= -\frac{x}{\left(x^4+1\right)^4} + \int \frac{1}{\left(x^4+1\right)^4}\,dx - \int \frac{dx}{\left(x^4+1\right)^4} = -\frac{x}{\left(x^4+1\right)^4}+C\,.$$