W każdym z poniższych 20 zadań podaj wzór na funkcję różniczkowalną na całej prostej (lub w podanej dziedzinie) o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

25. $f'(x)=(4x-5)^{54}$ $\quad f(1)=1$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{(4x-5)^{55}}{220}+\dfrac{221}{220}}$

26. $f'(x)=\sqrt{3x+1}$ $\quad f(1)=1$ $\quad D_f=\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{2}{9}\cdot(3x+1)^{3/2}-\dfrac{7}{9}}$

27. $f'(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^4}$ $\quad f(1)=1$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{-1}{6\cdot(x^2+1)^3}+\dfrac{49}{48}}$

28. $f'(x)=\dfrac{x^3}{x^4+1}$ $\quad f(0)=7$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{1}{4}\cdot\ln\left(x^4+1\right)+7}$

29. $f'(x)=\dfrac{1}{(3x-5)^2+1}$ $\quad f(2)=0$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{1}{3}\cdot arctg(3x-5)-\dfrac{\pi}{12}}$

30. $f'(x)=\sqrt[5]{x}$ $\quad f(1)=1$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{5x^{6/5}}{6}+\dfrac{1}{6}}$

31. $f'(x)=200x\cdot\left(x^2+1\right)^{99}$ $\quad f(0)=0$ $\quad f(x)=\mathbf{\left(x^2+1\right)^{100}-1}$

32. $f'(x)=6x^3\cdot\sqrt{x^4+9}$ $\quad f(2)=2$ $\quad f(x)=\mathbf{\left(x^4+9\right)^{3/2}-123}$

33. $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ $\quad f(-1)=-1$ $\quad f(x)=\mathbf{\ln\left(x^2+x+1\right)-1}$

34. $f'(x)=\dfrac{4x^3+2x+1}{(x^4+x^2+x+1)^2}$ $\quad f(1)=1$ $\quad f(x)=\mathbf{-\dfrac{1}{x^4+x^2+x+1}+\dfrac{5}{4}}$

35. $f'(x)=\sqrt[7]{x+1}$ $\quad f(0)=2$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{7(x+1)^{8/7}}{8}+\dfrac{9}{8}}$

36. $f'(x)=x^2\cdot\left(x^3+1\right)^{100}$ $\quad f(0)=1$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{\left(x^3+1\right)^{101}}{303}+\dfrac{302}{303}}$

37. $f'(x)=x^5\cdot\sqrt[3]{x^6+7}$ $\quad f(1)=0$ $\quad f(x)=\mathbf{\dfrac{\left(x^6+7\right)^{4/3}}{8}-2}$

38. $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ $\quad f(0)=0$ $\quad f(x)=\mathbf{\ln(e^x+1)-\ln 2}$

39. $f'(x)=\dfrac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}$ $\qquad f(0)=1 \qquad$ $f(x)=\boldsymbol{\dfrac{\ln\left(x^4+x^2+1\right)}{2}+1}$

40. $f'(x)=\dfrac{2x^3+x}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}$ $\qquad f(1)=1 \qquad$ $f(x)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\cdot\left(x^4+x^2+1\right)}+\dfrac{7}{6}}$

41. $f'(x)=\dfrac{2x^3+x}{\left(x^4+x^2+1\right)^3}$ $\qquad f(1)=1 \qquad$ $f(x)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4\cdot\left(x^4+x^2+1\right)^2}+\dfrac{37}{36}}$

42. $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ $\qquad f(0)=0 \qquad$ $f(x)=\boldsymbol{\mathrm{arctg}(x+1)-\dfrac{\pi}{4}}$

W kolejnych dwóch zadaniach funkcje mają być ciągłe na $\mathbb{R}$ i różniczkowalne na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

43. $f'(x)=\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad f(0)=2 \qquad$ $f(x)=\boldsymbol{-3\cdot\cos\sqrt[3]{x}+5}$

44. $f'(x)=\dfrac{\sin\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$ $\qquad f(0)=2 \qquad$ $f(x)=\boldsymbol{-5\cdot\cos\sqrt[5]{x}+7}$

---

45. Skonstruować funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(0)=0 \qquad \text{oraz} \qquad f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2} \quad \text{dla} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy wzór na pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2}=\sqrt{\left(x^2+x\right)^2}=\left|x^2+x\right|=\begin{cases} x^2+x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-1]\cup[0,\,+\infty) \\ -x^2-x & \text{dla} \quad x\in(-1,\,0) \end{cases}$$

Dla $x\in(-\infty,\,-1]$ zachodzi $f'(x)=x^2+x$, mamy więc[1]

$$f(x)=\int x^2+x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1\,.$$

Dla $x\in[-1,\,0]$ zachodzi $f'(x)=-x^2-x$, mamy więc

$$f(x)=\int -x^2-x\,dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C_2\,.$$

Dla $x\in[0,\,+\infty)$ zachodzi $f'(x)=x^2+x$, mamy więc

$$f(x)=\int x^2+x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_3\,.$$

---

[1]Dokładniej: Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $g(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C_1$ ma na całej prostej pochodną określoną wzorem $g'(x)=x^2+x$, skąd wynika, że jeżeli $f(x)=g(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C_1$ dla $x\in(-\infty,\,-1]$, to $f'(x)=g'(x)=x^2+x$ dla $x\in(-\infty,\,-1)$ oraz $f'(x^-)=g'(x)=x^2+x$ dla $x=-1$.

Co więcej, wzór $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C_1$ dla $x\in(-\infty,\,-1]$ definiuje wszystkie funkcje różniczkowalne $f:(-\infty,\,-1]\to\mathbb{R}$ spełniające warunki $f'(x)=x^2+x$ dla $x\in(-\infty,\,-1)$ oraz $f'(x^-)=x^2+x$ dla $x=-1$.

Aby zagwarantować warunek $f(0)=0$, należy przyjąć $C_2=C_3=0$.

Aby zagwarantować zgodność określenia $f(-1)$, musi być

$$\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+C_1=-\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+C_2\,,$$

czyli

$$\frac{1}{6}+C_1=-\frac{1}{6}\,,$$

skąd $C_1=-1/3$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3} & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-1]\\ -\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \quad x\in(-1,0)\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \quad x\in[0,+\infty)\end{cases}$$

46. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n\cdot\sqrt[7]{x^5+1}\,dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n=4}$ i wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[7]{x^5+1}\,,$$

czyli

$$t^7=x^5+1$$

oraz formalnie

$$7t^6\,dt=5x^4\,dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^4\cdot\sqrt[7]{x^5+1}\,dx=\frac{1}{5}\int\sqrt[7]{x^5+1}\cdot 5x^4\,dx=\frac{1}{5}\int t\cdot 7t^6\,dt=\frac{7}{5}\int t^7\,dt=\frac{7}{5}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{7\cdot t^8}{40}+C=$$

$$=\mathbf{\frac{7}{40}\cdot\left(x^5+1\right)^{8/7}+C\,.}$$

47. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1}\,dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $\mathbf{n=6}$ i wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[11]{x^7+1}\,,$$

czyli

$$t^{11}=x^7+1$$

oraz formalnie

$$11t^{10}\,dt=7x^6\,dx\,.$$

Otrzymujemy

$$\int x^6\cdot\sqrt[11]{x^7+1}\,dx=\frac{1}{7}\int\sqrt[11]{x^7+1}\cdot 7x^6\,dx=\frac{1}{7}\int t\cdot 11t^{10}\,dt=\frac{11}{7}\int t^{11}\,dt=\frac{11}{7}\cdot\frac{t^{12}}{12}+C=$$

$$=\frac{11\cdot t^{12}}{84}+C=\mathbf{\frac{11}{84}\cdot\left(x^7+1\right)^{12/11}+C\,.}$$

48. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int\frac{dx}{x+\sqrt[9]{x}}$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykonując podstawienie $x=t^9$ i formalnie $dx=9t^8\,dt$, otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt[9]{x}}=9\cdot\int\frac{t^8\,dt}{t^9+t}=9\cdot\int\frac{t^7\,dt}{t^8+1}=\frac{9}{8}\cdot\int\frac{8t^7\,dt}{t^8+1}=\frac{9}{8}\cdot\ln\left(t^8+1\right)+C=$$

$$=\frac{9}{8}\cdot\ln\left(x^{8/9}+1\right)+C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $x=t^{9/8}$ i formalnie $dx=\frac{9t^{1/8}\,dt}{8}$, otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt[9]{x}}=\frac{9}{8}\cdot\int\frac{t^{1/8}\,dt}{t^{9/8}+t^{1/8}}=\frac{9}{8}\cdot\int\frac{dt}{t+1}=\frac{9}{8}\cdot\ln|t+1|+C=\frac{9}{8}\cdot\ln\left(x^{8/9}+1\right)+C\,.$$

49. Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2\arcsin x\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik x^2 i różniczkując $\arcsin x$. Otrzymujemy:

$$\int x^2\cdot\arcsin x\,dx=\frac{x^3}{3}\cdot\arcsin x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie $t=1-x^2$, w którym stosujemy formalny wzór $dt=-2x\,dx$. Otrzymujemy:

$$\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{1}{6}\cdot\int\frac{x^2\cdot(-2x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}\cdot\int\frac{(1-t)\,dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{6}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\,dt=$$

$$=-\frac{\sqrt{t}}{3}+\frac{t^{3/2}}{9}+C_1=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}+\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{9}+C_1\,.$$

W konsekwencji

$$\int\arcsin x\,dx=\frac{x^3\cdot\arcsin x}{3}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}-\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{9}+C\,.$$

50. Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\arcsin x\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\arcsin x$. Otrzymujemy:

$$\int\arcsin x\,dx=\int 1\cdot\arcsin x\,dx=x\cdot\arcsin x-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie $t=1-x^2$, w którym stosujemy formalny wzór $dt=-2x\,dx$. Otrzymujemy:

$$\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C_1=-\sqrt{1-x^2}+C_1\,.$$

W konsekwencji

$$\int\arcsin x\,dx=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\,.$$