239. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami
$$f(x)=e^{x^9} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^7}\,.$$
Podaj wartość ilorazu pochodnych
$$\frac{f^{(63)}(0)}{g^{(63)}(0)}\,.$$

Odpowiedź: **72**

240. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami
$$f(x)=e^{x^{12}} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^{10}}\,.$$
Podaj wartość ilorazu pochodnych
$$\frac{f^{(60)}(0)}{g^{(60)}(0)}\,.$$

Odpowiedź: **6**

241. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=e^{x^2}\,.$$
Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

Odpowiedź: **30!/15!**

242. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=e^{x^3}\,.$$
Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

Odpowiedź: **30!/10!**

243. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{99n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\,.$$

Odpowiedź: **18**

244. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{30n}\frac{1}{\sqrt{n^2+4kn}}\,.$$

Odpowiedź: **5**

245. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{9n}\frac{n}{k^2}\,.$$

Odpowiedź: **8/9**

246. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{11n}\frac{n^2}{k^3}\,.$$

Odpowiedź: **60/121**

247. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a, że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z=a+bi$.
Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b=0, \quad a\in\mathbf{[-1,\,1)}$

b) $b=\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{3}, \quad a\in\left[-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\,\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right]$

c) $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad a\in\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\,\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]$

d) $b=\dfrac{1}{2}, \quad a\in\left[-\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}},\,\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right]$

248. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$, gdzie $0\leqslant a<b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x,\,f(x)):\ x\in[a,\,b]\}$$

wokół osi OY (krzywa jest w płaszczyźnie XY) jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Wyznaczyć pole powierzchni (fragmentu paraboloidy obrotowej)

$$\left\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2=z\leqslant 7\right\}\,.$$

Wskazówka: Dana w zadaniu powierzchnia obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant ???$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ.
Rozwiązanie:

Ponieważ dana w zadaniu paraboloida obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant\sqrt{7}$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ, przyjmiemy w podanym wzorze $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=\sqrt{7}$.

Biorąc pod uwagę, że $f'(x)=2x$ oraz wykonując po drodze podstawienie $t=1+4x^2$, czyli formalnie $dt=8x\,dx$, otrzymujemy:

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{7}} x\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}\cdot\int_1^{\sqrt{29}}\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2}\bigg|_{t=1}^{29}=$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot t^{3/2}\bigg|_{t=1}^{29}=\frac{\pi}{6}\cdot 29^{3/2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\cdot\left(29\sqrt{29}-1\right)\,.$$

Odpowiedź:
Pole danej w zadaniu powierzchni obrotowej jest równe $\frac{\pi}{6}\cdot\left(29\sqrt{29}-1\right)$.

249. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Wykonujemy podstawienie
$$t=\sqrt{x+1}, \qquad x=t^2-1$$
i formalnie
$$dx=2t\,dt.$$
Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,3]$ odpowiada przedziałowi $t\in[1,\,2]$.

Otrzymujemy
$$\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx=\int\limits_1^2 15\cdot\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=30\cdot\int\limits_1^2 t^4-t^2\,dt=30\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\Bigg|_{t=1}^{2}\right)=$$
$$=30\cdot\left(\frac{32-1}{5}-\frac{8-1}{3}\right)=6\cdot31-10\cdot7=186-70=116\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 116.

250. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:
Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej
$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}=\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+1+1}=\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+1}\,,$$
a następnie wykonujemy podstawienie
$$t=x-1, \qquad x=t+1$$
i formalnie
$$dx=dt.$$
Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,1]$ odpowiada przedziałowi $t\in[-1,\,0]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+1} = \int_{-1}^0 \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1} = \int_{-1}^0 \frac{t\,dt}{t^2+1} + \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \left(\left. \frac{\ln(t^2+1)}{2} \right|_{t=-1}^{0} \right) + \left(\left. \operatorname{arctg} t \right|_{t=-1}^{0} \right) =$$

$$= \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1) = 0 - \frac{\ln 2}{2} + 0 - \frac{-\pi}{4} =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\pi}{4}$.

251. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{(x-1)\cdot x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{x}\,,$$

$$1 = A\cdot x^2 + B\cdot(x-1) + D\cdot(x-1)\cdot x\,,$$

$$1 = Ax^2 + Bx - B + Dx^2 - Dx\,,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & A+D \\ 0 & = & B-D \\ 1 & = & -B\,, \end{array} \right.$$

skąd $B=-1$, $D=-1$ i $A=1$. W konsekwencji

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2} = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\,dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x} - \ln|x| + C\,.$$

252. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+8} + \frac{9}{n^3+27} + \ldots + \frac{k^2}{n^3+k^3} + \ldots + \frac{4n^2}{n^3+8n^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie danej w zadaniu granicy prowadzi do

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{n^3+k^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right),$$

gdzie

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}\,.$$

Ponieważ uzyskana granica jest granicą ciągu sum Riemanna dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0,2]$ odpowiadających podziałom tego przedziału na $2n$ przedziałów długości $1/n$, możemy zapisać jej wartość w postaci podanej niżej całki oznaczonej. Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|+C$$

obliczamy wartość tej całki:

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\int_0^2 \frac{3x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\ln\left|x^3+1\right|\Bigg|_{x=0}^{2} = \frac{1}{3}\cdot(\ln 9-\ln 1) = \frac{2\ln 3}{3}\,.$$

Odpowiedź: Podana granica ma wartość $\frac{2\ln 3}{3}$.

253. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\cdot\operatorname{arctg}x\,dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Całkując przez części otrzymujemy

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\cdot\operatorname{arctg}x\,dx = \frac{x^4}{4}\cdot\operatorname{arctg}x\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{9}{4}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\cdot\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\cdot\int_0^{\sqrt{3}} x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{2\pi}{3}$.

254. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej oraz z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin^{2017} n^{2016}\right|}{n^{2/3}+n^{3/2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}+n^{3/2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{0+n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} < +\infty\,,$$

bo $3/2>1$.

255. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$.

Rozwiązanie:

Oznaczamy daną całkę przez $I(x)$ i całkujemy dwukrotnie przez części:

$$I(x)=\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\cdot\sin 3x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot 3\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\cdot\cos 3x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot(-3\sin 3x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}\cdot I(x)\,,$$

co prowadzi do

$$4\cdot I(x)=2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x-9\cdot I(x)\,,$$

skąd

$$I(x)=\frac{2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{13}+C\,.$$

256. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego dla ciągów otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{11}}{8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{9999}}{4^n}=0\,.$$

Standardowe rachunki są tu pominięte, ale w rozwiązaniu muszą się znaleźć wraz z powołaniem się na odpowiednie kryterium.

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\sqrt[3]{1+\frac{n^{11}}{8^n}}}{2^n\cdot\sqrt{1+\frac{n^{9999}}{4^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{n^{11}}{8^n}}}{\sqrt{1+\frac{n^{9999}}{4^n}}}=\frac{\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt{1+0}}=1\,.$$

257. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma pochodną daną wzorem $f'(x)=|x|$. Ponadto wiadomo, że $f(-1)=-1$. Wyznaczyć $f(1)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$f'(x)=\begin{cases}-x & \text{dla } x\in(-\infty,\,0)\\ x & \text{dla } x\in[0,\,+\infty)\end{cases}$$

otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C & \text{dla } x\in(-\infty,\,0)\\ \dfrac{x^2}{2}+D & \text{dla } x\in[0,\,+\infty)\end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 0 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=0$, czyli musi zachodzić równość $C=D$.

Warunek $f(-1)=-1$ sprowadza się do $C=-1/2$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0) \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(1)=0$.

258. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int_1^2\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\cdot\int_1^2\frac{t^3\,dt}{t+1}=6\cdot\int_1^2\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\,dt=6\cdot\int_1^2 t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\,dt=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|\Big|_{t=1}^{2}=16-12+12-6\ln3-2+3-6+6\ln2=11-6\ln3+6\ln2\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $11-6\ln3+6\ln2=11+6\ln\dfrac{2}{3}$.

259. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}n^p\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$n^p\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}=n^{p+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}=n^{p+5/4}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{55n}\sqrt{1+\sqrt{9+\frac{k}{n}}}=$$

$$=n^{p+5/4}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{55n}f\left(\frac{k}{n}\right)\,,$$

gdzie $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{9+x}}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $55n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej, przy obliczaniu której korzytsamy z podstawienia $t=\sqrt{1+\sqrt{9+x}}$, czyli $x=\left(t^2-1\right)^2-9=t^4-2t^2-8$ i formalnie $dx=\left(4t^3-4t\right)\,dt$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{55n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^{55}f(x)\,dx=\int_0^{55}\sqrt{1+\sqrt{9+x}}\,dx=\int_2^3 t\cdot\left(4t^3-4t\right)\,dt=4\cdot\int_2^3 t^4-t^2\,dt=$$

$$=4\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{t=2}^{3}=4\cdot\left(\frac{243-32}{5}-\frac{27-8}{3}\right)=4\cdot\left(\frac{211}{5}-\frac{19}{3}\right)=4\cdot\frac{633-95}{15}=4\cdot\frac{538}{15}=$$

$$=\frac{2152}{15}\,.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/4}$ będzie równy 0, czyli dla $p=-5/4$.

Odpowiedź: Dla $p=-5/4$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2152/15$.

260. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t=\sqrt[3]{x+1}$, czyli $x=t^3-1$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$, otrzymujemy

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int\left(t^3-1\right)^2\cdot t\cdot 3t^2\,dt=3\cdot\int t^9-2t^6+t^3\,dt=3\cdot\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{3t^{10}}{10}-\frac{6t^7}{7}+\frac{3t^4}{4}+C=\frac{3\cdot(x+1)^{10/3}}{10}-\frac{6\cdot(x+1)^{7/3}}{7}+\frac{3\cdot(x+1)^{4/3}}{4}+C\,.$$

Uwaga: Można też całkować przez części.

261. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2\cdot\ln x\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\int_1^e x^2\cdot\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x\Bigg|_{x=1}^{e}-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\int_1^e x^2\,dx=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{x^3}{9}\Bigg|_{x=1}^{e}\right)=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}$.

262. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1+k/n}{1+(k/n)^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\,,$$

gdzie $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg}x+\frac{\ln(1+x^2)}{2}\Bigg|_{x=0}^{1}=$$

$$=\operatorname{arctg}1+\frac{\ln 2}{2}-\operatorname{arctg}0-\frac{\ln 2}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}\,.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}\,.$$

263. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=2 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{0,\,2,\,4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}\,x^2=2\,,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2+Ax+B & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,3) \\ x^2+Cx+D & \text{dla} \quad x\in[3,\,+\infty) \end{cases} \tag{$*$}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 3 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=3$, czyli musi zachodzić równość

$$3A+B=3C+D\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Warunki $f(x)=x$ dla $x\in\{0,\,2,\,4\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$0=B\,, \tag{$\diamondsuit$}$$

$$2=4+2A+B\,, \tag{$\heartsuit$}$$

$$4=16+4C+D\,. \qquad (\spadesuit)$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań ($\clubsuit$), ($\diamondsuit$), ($\heartsuit$) i ($\spadesuit$) prowadzi do

$$A=-1\,, \qquad B=0\,, \qquad C=-9\,, \qquad D=24\,.$$

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,3) \\ x^2-9x+24 & \text{dla} \quad x\in[3,\,+\infty) \end{cases} \qquad (**)$$

Zatem $f(5)=4$.

264. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^9 \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx\,.$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Podstawiamy $x=t^4$, czyli formalnie $dx=4t^3\,dt$:

$$\int_1^9 \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx=\int_1^{\sqrt{3}} 4t^3\cdot\operatorname{arctg}t\,dt\,.$$

Następnie wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int_1^{\sqrt{3}} 4t^3\cdot\operatorname{arctg}t\,dt=t^4\cdot\operatorname{arctg}t\Big|_{t=1}^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4}{t^2+1}\,dt=$$

$$=9\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4-1+1}{t^2+1}\,dt=9\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\int_1^{\sqrt{3}}t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\Big|_{t=1}^{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{3}+1-\operatorname{arctg}1\right)=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}=3\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8\pi}{3}-\frac{2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\dfrac{8\pi}{3}-\dfrac{2}{3}$.

265. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p\cdot\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}+\ldots+\sqrt[3]{8n-2}+\sqrt[3]{8n-1}+\sqrt[3]{8n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{7n} n^p \cdot \sqrt[3]{n+k} = n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{n+k} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{1+\frac{k}{n}} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $7n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_1^8 f(x)\,dx = \int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4} \cdot x^{4/3} \Bigg|_{x=1}^{8} = \frac{3}{4} \cdot 16 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 15 = \frac{45}{4}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+4/3}$ będzie równy 0, czyli dla $p=-4/3$.

Odpowiedź: Dla $p=-4/3$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $45/4$.

266. W każdym z zadań **266.1-266.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.
Przypomnienie: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in D_f\}$.

266.1. $f(x)=x^2-5$, $D_f=(-1,3)$, $\|f\|=\mathbf{5}$

266.2. $f(x)=x^3-15$, $D_f=(-1,3)$, $\|f\|=\mathbf{16}$

266.3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1/4}$

266.4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1}$

266.5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+7}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{4/3}$

267. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg".

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}} = \int_1^3 \frac{dx}{1+\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2}$$

i wykonujemy podstawienie $t=\sqrt[3]{x-2}$, czyli $x=t^3+2$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$. Otrzymujemy

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2} = \int_{-1}^1 \frac{3t^2\,dt}{1+t^2} = 3\cdot\int_{-1}^1 \frac{t^2+1-1\,dt}{1+t^2} = 3\cdot\int_{-1}^1 dt - 3\cdot\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$=6-3\cdot\left(\operatorname{arctg}t\Big|_{t=-1}^{1}\right)=6-3\cdot\operatorname{arctg}1+3\cdot\operatorname{arctg}(-1)=6-3\cdot\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{-\pi}{4}=6-\frac{3\pi}{2}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $6-\frac{3\pi}{2}$.

268. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+4}\,.$$

Wskazówka: $n^4+4=(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)$.

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{n}{n^4+4}=\frac{n}{(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)}=\frac{An+B}{n^2-2n+2}+\frac{Cn+D}{n^2+2n+2}\,,$$

$$n=(An+B)\cdot\left(n^2+2n+2\right)+(Cn+D)\cdot\left(n^2-2n+2\right)\,,$$

$$n=An^3+2An^2+2An+Bn^2+2Bn+2B+Cn^3-2Cn^2+2Cn+Dn^2-2Dn+2D\,,$$

$$\begin{cases}0 = 2B+2D\,, & (n^0)\\ 1 = 2A+2B+2C-2D\,, & (n^1)\\ 0 = 2A+B-2C+D\,, & (n^2)\\ 0 = A+C\,. & (n^3)\end{cases}$$

Z pierwszego i czwartego równania dostajemy odpowiednio $D=-B$ oraz $C=-A$, co prowadzi kolejno do

$$\begin{cases}1 = 2A+2B-2A+2B\,,\\ 0 = 2A+B+2A-B\,,\end{cases}$$

$$\begin{cases}1 = 4B\,,\\ 0 = 4A\,,\end{cases}$$

$$B=1/4,\qquad D=-1/4,\qquad A=C=0\,.$$

Zatem

$$\frac{n}{n^4+4}=\frac{1/4}{n^2-2n+2}-\frac{1/4}{n^2+2n+2}=\frac{1/4}{(n-1)^2+1}-\frac{1/4}{(n+1)^2+1}\,.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^4+4}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/4}{(n-1)^2+1}-\frac{1/4}{(n+1)^2+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/4}{0^2+1}-\frac{1/4}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1/4}{1^2+1}-\frac{1/4}{3^2+1}\right)+\left(\frac{1/4}{2^2+1}-\frac{1/4}{4^2+1}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1/4}{(N-3)^2+1}-\frac{1/4}{(N-1)^2+1}\right)+\left(\frac{1/4}{(N-2)^2+1}-\frac{1/4}{N^2+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/4}{(N-1)^2+1}-\frac{1/4}{(N+1)^2+1}\right)=\frac{1/4}{0^2+1}+\frac{1/4}{1^2+1}-\frac{1/4}{N^2+1}-\frac{1/4}{(N+1)^2+1}\to\frac{3}{8}$$

przy $N\to\infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa 3/8.

269. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+\frac{1}{121}-\frac{1}{144}+\frac{1}{169}-\ldots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, możemy beztrosko zmieniać kolejność jego wyrazów, a nawet rozdzielać go na sumę dwóch szeregów. W konsekwencji otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ jest równa $\frac{\pi^2}{12}$.

270. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}\,.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}\right)\cdot\left(4+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\left(3-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{4}{n}\right)}=\frac{4\cdot4\cdot0}{3\cdot3\cdot3}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}\geqslant\frac{(4n+1)\cdot(4n+5)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{4n-3}{3n-2} \geqslant \frac{4n+5}{3n+7},$$

$$(4n-3)\cdot(3n+7) \geqslant (4n+5)\cdot(3n-2),$$

$$12n^2+28n-9n-21 \geqslant 12n^2-8n+15n-10,$$

$$12n^2+19n-21 \geqslant 12n^2+7n-10,$$

$$12n \geqslant 11,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

271. Funkcja $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\int_1^x (\log_2 t-3)^{2017}\,dt\,.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f'(x)=(\log_2 x-3)^{2017}$, mamy $f'(x)<0$ dla $x\in(1,8)$ oraz $f'(x)>0$ dla $x>8$. Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(1,8)$ i rosnąca w przedziale $(8,+\infty)$, a zatem osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

Odpowiedź: Dana w zadaniu funkcja osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

272. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2-4x+5},$$

a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t=x-2$ i formalnie $dx=dt$ otrzymujemy

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2-4x+5}=\int_0^5 \frac{dx}{(x-2)^2+1}=\int_{-2}^3 \frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t\,\Big|_{t=-2}^{3}=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}(-2)=$$

$$=\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}2=\arg(1+3i)+\arg(1+2i)=\arg\big((1+3i)(1+2i)\big)=\arg(-5+5i)=\frac{3\pi}{4}\,.$$

Należy zauważyć, że ze względu na niejednoznaczność argumentu mogliśmy popełnić błąd będący wielokrotnością 2π. Jednak ze względu na oszacowania

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3 < \pi\,,$$

co pokazuje, że otrzymany wynik jest poprawny (dodanie lub odjęcie 2π wyprowadziłoby go poza otrzymane powyżej oszacowania).

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $3\pi/4$.

273. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx\,.$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[3]{x+1}, \qquad x=t^3-1$$

i formalnie

$$dx=3t^2\,dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=7$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,7]$ odpowiada przedziałowi $t\in[1,\,2]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx=\int_1^2 \frac{4\cdot(t^3-1)}{t^2}\,3t^2dt=12\cdot\int_1^2 t^3-1\,dt=12\cdot\left(\frac{t^4}{4}-t\,\Bigg|_{t=1}^{2}\right)=$$

$$=12\cdot\left(\frac{16-1}{4}-(2-1)\right)=12\cdot\left(\frac{15}{4}-\frac{4}{4}\right)=12\cdot\frac{11}{4}=33\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 33.

274. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}\,.$$

Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x}=\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\,,$$

$$1=A\cdot(x+1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x+1)\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ($\heartsuit$), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości (♡) kolejno $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 1&=2A, \quad \text{skąd} \quad A=\frac{1}{2}\,, \\ 1&=-B, \quad \text{skąd} \quad B=-1\,, \\ 1&=2C, \quad \text{skąd} \quad C=\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\int_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x} = \int_1^6 \frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2}\,dx = \frac{\ln|x|}{2} - \ln|x+1| + \frac{\ln|x+2|}{2}\Bigg|_{x=1}^{6} =$$

$$= \frac{\ln 6}{2} - \ln 7 + \frac{\ln 8}{2} - \frac{\ln 1}{2} + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{2} - \ln 7 + \frac{3\cdot\ln 2}{2} - 0 + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} =$$

$$= 3\cdot\ln 2 - \ln 7 = \ln 8 - \ln 7 = \ln\frac{8}{7}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $\ln\frac{8}{7}$.

275. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+50}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+1$ oraz $t=y/7$:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+50} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+49} = \int \frac{dy}{y^2+49} = \int \frac{dy}{49(y/7)^2+49} = \int \frac{7\,dt}{49t^2+49} =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{7} + C = \frac{\operatorname{arctg}(y/7)}{7} + C = \frac{\operatorname{arctg}((x+1)/7)}{7} + C\,.$$

276. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Sposób I: (rzemieślniczy)

Wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = x\cdot\sin x\Bigg|_{x=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0 - 0 - \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0\,,$$

gdyż całka z sinusa po pełnym okresie jest równa 0.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.

Sposób II: (pomysłowy)

Wykonując podstawienie $x=t+\pi$, czyli $t=x-\pi$, otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos(t+\pi)\,dt=-\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos t\,dt=-\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt-\pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt\,.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że całka $\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt$ jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, a całka $\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt$ jest równa 0 jako całka z cosinusa po pełnym okresie.

277. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}\,.$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych otrzymujemy:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(x+1)}=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\,dx=\ln|x|-\ln|x+1|\Bigg|_{x=1}^{\infty}=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_{x=1}^{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\ln\frac{1}{2}=\ln\left|\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}\right|+\ln 2=\ln|1|+\ln 2=\ln 2\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\ln 2$.

278. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+1}{x^4+x^2}=\frac{1}{(x^2+1)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}\,,$$

$$2x+1=(Ax+B)\cdot x^2+C\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)+D\cdot\left(x^2+1\right)\,,$$

$$2x+1=Ax^3+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+D\,,$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}0&=&A+C\\0&=&B+D\\2&=&C\\1&=&D\end{array}\right.$$

Stąd otrzymujemy $A=-2$ i $B=-1$.

Wobec tego

$$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} -\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\,dx = -\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{arctg}x + 2\ln|x| - \frac{1}{x}\Bigg|_{x=\sqrt{3}}^{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-\operatorname{arctg}x) + \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \ln 4 + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - 2\ln\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + 0 + \ln 1 + \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

279. W każdym z zadań **279.1-279.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Niech $a_n = \frac{6}{n}$. Wówczas:

279.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \boldsymbol{+\infty}$	**279.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \boldsymbol{+\infty}$
279.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{6}$	**279.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{9}$
279.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+3}) = \mathbf{11}$	**279.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2}) = \mathbf{3}$
279.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+3}) = \mathbf{5}$	**279.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+3}) = \mathbf{2}$
279.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \mathbf{36}$	**279.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) = \mathbf{45}$
279.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) = \mathbf{49}$	**279.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2\right) = \mathbf{9}$
279.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2\right) = \mathbf{13}$	**279.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2\right) = \mathbf{4}$
279.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{63}$	**279.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{70}$
279.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{73}$	**279.18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{7}$
279.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{10}$	**279.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{3}$

280. W każdym z zadań **280.1-280.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Niech $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6\,.$$

Wobec tego:

280.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \mathbf{23/2}$

280.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) = \mathbf{21/2}$

280.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{1/2}$

280.4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{3/2}$

280.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \mathbf{1/4}$

280.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) = \mathbf{5/4}$

280.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{1}$

280.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}) = \mathbf{4}$

280.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (9^{a_n} - 9^{a_{n+1}}) = \mathbf{2}$

280.10. $\sum_{n=1}^{\infty} (9^{a_n} - 9^{a_{n+2}}) = \mathbf{10}$

280.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (16^{a_n} - 16^{a_{n+1}}) = \mathbf{3}$

280.12. $\sum_{n=1}^{\infty} (16^{a_n} - 16^{a_{n+2}}) = \mathbf{18}$

280.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+1}}\right) = \mathbf{4}$

280.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+2}}\right) = \mathbf{10}$