233. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a+b\cos x}{c+d\cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy

$$z=\cos x+i\sin x\,.$$

Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z^n=\cos nx+i\sin nx$$

i w konsekwencji

$$\cos nx=\operatorname{Re} z^n\,.$$

Przekształcamy dany w zadaniu szereg, korzystając po drodze ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} z^n}{3^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n=\operatorname{Re}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\operatorname{Re}\frac{3}{3-z}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{3}{3-\cos x-i\sin x}=\operatorname{Re}\frac{3\cdot(3-\cos x+i\sin x)}{(3-\cos x)^2+\sin^2 x}=\frac{3\cdot(3-\cos x)}{9-6\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}=$$

$$=\frac{9-3\cos x}{10-6\cos x}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu danego w treści zadania jest równa $\dfrac{9-3\cos x}{10-6\cos x}$.

234. Korzystając ze wzorów

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

oraz

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Skonfrontować wynik z zadaniem **190** z listy **11**.

Wskazówka: Dodać szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

dla $z\in\left\{-1,\ \dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right\}$, przemnożone przez odpowiednie współczynniki.

Odpowiedź:

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\ln 2}{3}.$$

235. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Odpowiedź:

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{8}+\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2\cdot\sqrt{2}}.$$

236. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi}\sin^{2020}x-\cos^{2020}x\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

oraz

$$|\sin(x+\pi)|=|\sin x|$$

otrzymujemy

$$\int_0^{\pi}\cos^{2020}x\,dx=\int_0^{\pi}\sin^{2020}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{2020}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^{2020}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^{2020}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^{2020}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\,dx=\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^{2020}x\,dx+\int_0^{\pi/2}\sin^{2020}x\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\sin^{2020}x\,dx\,,$$

skąd wynika, że dana w zadaniu całka ma wartość zero.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka oznaczona ma wartość 0.

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: Funkcje $\sin^{2020}$ i $\cos^{2020}$ są całkowane po pełnym okresie równym π, a przy tym jest to ta sama funkcja, tylko przesunięta o $\pi/2$.

237. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty}\frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx\,.$$

Wskazówka: Wykonać podstawienie $x=1/t$ albo $x=e^t$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Najpierw udowodnimy zbieżność danej całki. W tym celu zapiszemy ją w postaci sumy dwóch całek, a następnie zastosujemy kryterium porównawcze dla udowodnienia zbieżności składnika będącgo całką niewłaściwą o nieujemnej fukcji podcałkowej:

$$\int_0^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx = -\int_0^1 \frac{1-x^5}{x^7+1}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx\,,$$

$$\int_1^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{x^5-0}{x^7+0}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty\,.$$

Następnie wykonamy podstawienie $x=1/t$ i formalnie $dx=-dt/t^2$. Otrzymujemy:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx = \int_\infty^0 \frac{t^{-5}-1}{t^{-7}+1}\cdot\frac{-dt}{t^2} = \int_0^\infty \frac{t^{-5}-1}{t^{-5}+t^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{(t^{-5}-1)\cdot t^5}{(t^{-5}+t^2)\cdot t^5}\,dt = \int_0^\infty \frac{1-t^5}{1+t^7}\,dt = -I\,,$$

skąd $I=-I$, czyli $I=0$.

Odpowiedź

Dana całka jest zbieżna i ma wartość 0.

Sposób II

Dowodzimy zbieżności całki jak w sposobie I, a następnie wykonujemy podstawienie $x=e^t$, czyli $t=\ln x$, i formalnie $dx=e^t\,dt$. Otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{5t}-1}{e^{7t}+1}\cdot e^t\,dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{6t}-e^t}{e^{7t}+1}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{(e^{6t}-e^t)\cdot e^{-7t/2}}{(e^{7t}+1)\cdot e^{-7t/2}}\,dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{5t/2}-e^{-5t/2}}{e^{7t/2}+e^{-7t/2}}\,dt\,,$$

co jest równe 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

238. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$, czyli $t=1/x$ i formalnie $dx=\frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\,dx = -\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}t}{t^3}\,dt = -\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^3}\cdot\mathrm{arctg}t\,dt =$$

$$=\frac{1}{2t^2}\cdot\mathrm{arctg}t\,\Bigg|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}\cdot\frac{-\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t}-\operatorname{arctg}t\,\Bigg|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\,.$$

Dlaczego powyższe rozwiązanie jest błędne ???
Podaj poprawne rozwiązanie.

Rozwiązanie:

BŁĘDY:

1° Wykonane podstawienie nie przeprowadza przedziału całkowania $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ na przedział $\left[-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right]$.

2° Uzyskana w wyniku błędnego podstawienia całka niewłaściwa jest rozbieżna. Funkcja podcałkowa ma osobliwość w punkcie 0.

Rozwiązania poprawne:

Sposób I:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx=2\cdot\int_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$, czyli $t=1/x$ i formalnie $dx=\frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx=-\int_{\infty}^{1/\sqrt{3}}\frac{\operatorname{arctg}t}{t^3}\,dt=\int_{1/\sqrt{3}}^{\infty}\frac{1}{t^3}\cdot\operatorname{arctg}t\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2t^2}\cdot\operatorname{arctg}t\,\Bigg|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty}+\frac{1}{2}\cdot\int_{1/\sqrt{3}}^{\infty}\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}\cdot\operatorname{arctg}t\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\int_{1/\sqrt{3}}^{\infty}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=0+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t}-\operatorname{arctg}t\,\Bigg|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.

Sposób II:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = 2\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Korzystamy z równości

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x \qquad \text{dla } x>0\,.$$

Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\,dx-\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx=$$

$$=\frac{\pi x^2}{4}\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}-\frac{x^2\cdot\operatorname{arctg}x}{2}\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}1-\frac{1}{x^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(x-\operatorname{arctg}x\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.