

Zadania do omówienia na konwersatorium¹ w środę 9.06.2021.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

233. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a + b \cos x}{c + d \cos x},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.**234.** Korzystając ze wzorów

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad |z| \leq 1, z \neq 1$$

oraz

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z \quad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Skonfrontować wynik z zadaniem **190** z listy **11**.**Wskazówka:** Dodać szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

dla $z \in \left\{-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right\}$, przemnożone przez odpowiednie współczynniki.**235.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

236. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi} \sin^{2020} x - \cos^{2020} x \, dx.$$

¹Środowy wykład będzie miał formę konwersatorium.

237. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5 - 1}{x^7 + 1} dx.$$

Wskazówka: Wykonać podstawienie $x = 1/t$ albo $x = e^t$.

238. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$ i formalnie $dx = \frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} dt = - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t dt = \\ &= \frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{-\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dlaczego powyższe rozwiązanie jest błędne ???

Podaj poprawne rozwiązanie.