226. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x\in[0,\,\pi/2] \\ 0 & \text{dla} \quad x\in(\pi/2,\,2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu $\sin n\pi$ czy $\cos n\pi$).

Rozwiązanie:

Stosując wzory na współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} dx=\frac{\pi/2}{2\pi}=\frac{1}{4}\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx=\frac{\sin nx}{n\pi}\Bigg|_{x=0}^{\pi/2}=\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n\equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin nx\,dx=-\frac{\cos nx}{n\pi}\Bigg|_{x=0}^{\pi/2}=\frac{1-\cos(n\pi/2)}{n\pi}=$$

$$=\left\{\begin{array}{cl} \dfrac{1}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 1 \pmod 2 \\ \dfrac{1-(-1)^{n/2}}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 0 \pmod 2 \end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{cl} \dfrac{1}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 1 \pmod 2 \\ 0 & \text{dla} \quad n\equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 2 \pmod 4 \end{array}\right\}=\begin{cases} \dfrac{1}{n\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 1 \pmod 2 \\ 0 & \text{dla} \quad n\equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{1}{(n/2)\pi} & \text{dla} \quad n\equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

227. Niech

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3^n}\,.$$

Zakładając pełną beztroskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$.

Rozwiązanie:

Korzystamy z tego, że sinusy o różnych częstotliwościach są prostopadłe, czyli całka z ich iloczynu jest zerem:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{dla} \quad m=n \\ 0 & \text{dla} \quad m \neq n \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{3^m}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin mx}{3^m}\, dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin nx}{3^n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{6^n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6^n} = \frac{\pi}{5}.$$

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: iloczyn skalarny dwóch wektorów jest sumą iloczynów odpowiednich współrzędnych – tutaj rolę współrzędnych spełniają współczynniki szeregu trygonometrycznego (z dokładnością do stałego czynnika).

W rozwiązaniu można też powołać się bezpośrednio na postać iloczynu skalarnego w bazie ortogonalnej sinusów i cosinusów.

228. Obliczyć wartość sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości calek:

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}}\, dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}}\, dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx\, dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2+2},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx\, dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right) \cdot \frac{-n}{n^2+2}.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}}-1 \qquad \text{oraz} \qquad B = e^{2\pi\sqrt{2}}+1.$$

Wskazówka: Wykorzystać szereg Fouriera funkcji $f(x)=e^{x\sqrt{2}}$ dla $x\in(0,2\pi)$. Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsevala.

Rozwiązanie:

Na wstępie zauważmy, że na mocy podanych równości szereg Fouriera funkcji f okresowej z okresem 2π i określonej na przedziale $[0, 2\pi)$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\sqrt{2}} & \text{dla} \quad x \in (0, 2\pi) \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2} & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

ma współczynniki

$$a_0=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\,,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\,,$$

a ponadto jest on punktowo zbieżny do funkcji f, gdyż f ma w punkcie nieciągłości wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Sposób I

Porównując wartość funkcji f w punkcie $x=0$ z sumą jej szeregu Fouriera w tym punkcie otrzymujemy

$$f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,,$$

czyli

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2}=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2}-\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B-A}{4A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$

Sposób II

Korzystając z równości Parsevala:

$$\int_0^{2\pi}f(x)^2\,dx=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

otrzymujemy

$$\frac{e^{4\pi\sqrt{2}}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}\right)^2+\left(\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\frac{-n}{n^2+2}\right)^2\right)\,,$$

co przepisujemy kolejno jako:

$$\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}+1\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2\sqrt{2}}-\frac{e^{2\pi\sqrt{2}}-1}{4\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}}+\pi\sqrt{2}-e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{4\cdot\left(e^{2\pi\sqrt{2}}-1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,,$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B-A}{4A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\,.$$

229. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}\qquad \text{dla}\qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi\,.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\ldots$$

Wskazówka: Scałkować podany w zadaniu szereg trygonometryczny i wstawić $x=\pi/2$.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f będącą sumą szeregu funkcyjnego

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,,\tag{1}$$

gdzie $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^3}$, a więc $f_n'(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2}$. Ponieważ szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n'\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

są zbieżne, szeregi funkcyjne $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'$ są zbieżne jednostajnie i w konsekwencji szereg (1) można różniczkować wyraz za wyrazem. Zatem dla $x\in[0,\,2\pi]$ mamy

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}\,,$$

skąd

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}\,dx=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2 x}{6}+C\,.$$

Zauważmy, że ze wzoru (1) wynika $f(0)=0$, skąd $C=0$ i w konsekwencji

$$f(x)=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2 x}{6} \qquad \text{dla} \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi\,. \tag{2}$$

Przyjmując $x=\pi/2$ we wzorze (2) otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{96}-\frac{\pi^3}{16}+\frac{\pi^3}{12}=\pi^3\cdot\frac{1-6+8}{96}=\pi^3\cdot\frac{3}{96}=\frac{\pi^3}{32}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu liczbowego podanego w treści zadania jest równa $\pi^3/32$.

230. W każdym z zadań **230.1-230.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{4^n}, \qquad B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{5^n},$$

$$C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{10^n}, \qquad D(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{10^n}.$$

230.1. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$ **230.2.** $\int\limits_0^{2\pi} B(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

230.3. $\int\limits_0^{2\pi} C(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$ **230.4.** $\int\limits_0^{2\pi} D(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

230.5. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)B(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{19}}$ **230.6.** $\int\limits_0^{2\pi} A(x)C(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{39}}$

230.7. $\int\limits_0^{2\pi} A(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{159}}$ **230.8.** $\int\limits_0^{2\pi} B(x)C(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{49}}$

230.9. $\int\limits_0^{2\pi} B(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{249}}$ **230.10.** $\int\limits_0^{2\pi} C(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{999}}$

---

231. W każdym z zadań **231.1-231.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n},\qquad B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{3^n},\qquad C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3nx}{10^n},\qquad E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n+1)x}{10^n},\qquad F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

231.1. $\int_0^{2\pi} A(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

231.2. $\int_0^{2\pi} B(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

231.3. $\int_0^{2\pi} C(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

231.4. $\int_0^{2\pi} D(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

231.5. $\int_0^{2\pi} E(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

231.6. $\int_0^{2\pi} F(x)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{99}}$

231.7. $\int_0^{2\pi} A(x)B(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{11}}$

231.8. $\int_0^{2\pi} A(x)C(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{22}}$

231.9. $\int_0^{2\pi} A(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{79}}$

231.10. $\int_0^{2\pi} A(x)E(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{158}}$

231.11. $\int_0^{2\pi} A(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{316}}$

231.12. $\int_0^{2\pi} B(x)C(x)\,dx=\boldsymbol{0}$

231.13. $\int_0^{2\pi} B(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{2699}}$

231.14. $\int_0^{2\pi} B(x)E(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{30\pi}{2699}}$

231.15. $\int_0^{2\pi} B(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{8097}}$

231.16. $\int_0^{2\pi} C(x)D(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{90\pi}{2699}}$

231.17. $\int_0^{2\pi} C(x)E(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{2699}}$

231.18. $\int_0^{2\pi} C(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{\frac{30\pi}{2699}}$

231.19. $\int_0^{2\pi} D(x)E(x)\,dx=\boldsymbol{0}$

231.20. $\int_0^{2\pi} D(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{0}$

231.21. $\int_0^{2\pi} E(x)F(x)\,dx=\boldsymbol{0}$

---

232. W każdym z zadań **232.1-232.16** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{p^n}=\frac{p\cdot\sin x}{p^2+1-2p\cdot\cos x}$ dla $p>1$.

232.1. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{5-4\cos x}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

232.2. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{5-3\cos x}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{9}}$

232.3. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cdot\sin 2x\,dx}{5-4\cos x}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

232.4. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cdot\sin 2x\,dx}{5-3\cos x}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{27}}$

232.5. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cdot\sin 3x\,dx}{5-4\cos x}=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

232.6. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cdot\sin 3x\,dx}{5-3\cos x}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{81}}$

232.7. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{13-5\cos x}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{25}}$

232.8. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{17-8\cos x}=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$

232.9. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(5-4\cos x)^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

232.10. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(5-3\cos x)^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{18}}$

232.11. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(13-5\cos x)^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{150}}$

232.12. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(17-8\cos x)^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{240}}$

232.13. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(5-4\cos x)\cdot(5-3\cos x)}=\boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$

232.14. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(13-5\cos x)\cdot(17-8\cos x)}=\boldsymbol{\frac{\pi}{190}}$

232.15. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(5-4\cos x)\cdot(13-5\cos x)}=\boldsymbol{\frac{\pi}{45}}$

232.16. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(5-3\cos x)\cdot(13-5\cos x)}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{105}}$
