

Przypomnienie najważniejszych definicji i twierdzeń związanych z szeregami Fouriera.

Iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji¹:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx .$$

Iloczyn skalarny w języku bazy² ortogonalnej sinusów i cosinusów:

Jeżeli

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

oraz

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) ,$$

to

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx = 2\pi \cdot a_0 \cdot c_0 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot c_n + b_n \cdot d_n) .$$

Równość Parsewala:

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi \cdot a_0^2 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) .$$

Szereg Fouriera funkcji³ f:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) , \tag{F}$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx , \tag{F0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \tag{FA}$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx dx . \tag{FB}$$

Przy założeniach, które są spełnione przez używane przez nas funkcje, szereg Fouriera (F) jest punktowo zbieżny do funkcji f.

¹Nie precyzujemy dokładnie, jak regularne mają być funkcje. Na pewno muszą być okresowe o okresie 2π .

²To nie jest baza w sensie algebry liniowej, bo potrzebujemy przejścia granicznego do wysumowania szeregu.

³Okresowej o okresie 2π , w punktach nieciągłości mającej wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Kolokwium nr 5 (wtorek 1 czerwca 2021): materiał zadań 1–232.

11:15-12:15 – quiz na Moodlu (60 minut)

12:20-13:00 – dwa zadania otwarte (40 minut)

13:10-13:45 – wykład (35 minut)

Przed rozpoczęciem kolokwium należy dołączyć do spotkania w Teamsach na kanale wykładu i włączyć kamerę.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 27.05.2021.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

226. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi/2, 2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu $\sin n\pi$ czy $\cos n\pi$).

227. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}.$$

Zakładając pełną beztróskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$.

228. Obliczyć wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}} dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2}.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \quad \text{oraz} \quad B = e^{2\pi\sqrt{2}} + 1.$$

Wskazówka: Wykorzystać szereg Fouriera funkcji $f(x) = e^{x\sqrt{2}}$ dla $x \in (0, 2\pi)$. Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsewala.

229. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

Wskazówka: Scałkować podany w zadaniu szereg trygonometryczny i wstawić $x = \pi/2$.

230. W każdym z zadań **230.1-230.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n}, & B(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n}, \\ C(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}, & D(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}. \end{aligned}$$

230.1. $\int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

230.2. $\int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

230.3. $\int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

230.4. $\int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots\dots\dots$

230.5. $\int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots\dots\dots$

230.6. $\int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$

230.7. $\int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

230.8. $\int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$

230.9. $\int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

230.10. $\int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$

231. W każdym z zadań **231.1-231.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n}, \quad C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n}, \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n}, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

$$\mathbf{231.1.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.2.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.3.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.4.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.5.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.6.} \quad \int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.7.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.8.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.9.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.10.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.11.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.12.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.13.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.14.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.15.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.16.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.17.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.18.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.19.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.20.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{231.21.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = \dots\dots\dots$$

232. W każdym z zadań **232.1-232.16** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p \cdot \sin x}{p^2 + 1 - 2p \cdot \cos x}$ dla $p > 1$.

232.1. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$ **232.2.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

232.3. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$ **232.4.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

232.5. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x dx}{5 - 4 \cos x} = \dots\dots\dots$ **232.6.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x dx}{5 - 3 \cos x} = \dots\dots\dots$

232.7. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{13 - 5 \cos x} = \dots\dots\dots$ **232.8.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{17 - 8 \cos x} = \dots\dots\dots$

232.9. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(5 - 4 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$ **232.10.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(5 - 3 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$

232.11. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(13 - 5 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$ **232.12.** $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(17 - 8 \cos x)^2} = \dots\dots\dots$

232.13. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (5 - 3 \cos x)} = \dots\dots\dots$

232.14. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(13 - 5 \cos x) \cdot (17 - 8 \cos x)} = \dots\dots\dots$

232.15. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \dots\dots\dots$

232.16. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(5 - 3 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \dots\dots\dots$