

**219.** W każdym z zadań **219.1-219.15** podaj normę supremum funkcji  $f$  o podanym wzorze i dziedzinie.

---

**219.1.**  $f(x) = 7 \sin x$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\|f\| = 7$

---

**219.2.**  $f(x) = 7 \sin x - 3$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\|f\| = 10$

---

**219.3.**  $f(x) = 7 \sin^2 x - 3$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\|f\| = 4$

---

**219.4.**  $f(x) = 7 \sin^3 x - 3$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\|f\| = 10$

---

**219.5.**  $f(x) = \log_2 x - 2$ ,  $D_f = (\frac{1}{8}, 8)$ ,  $\|f\| = 5$

---

**219.6.**  $f(x) = \log_2 x - 2$ ,  $D_f = (2, 32)$ ,  $\|f\| = 3$

---

**219.7.**  $f(x) = (\log_2 x)^2 - 6$ ,  $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$ ,  $\|f\| = 6$

---

**219.8.**  $f(x) = (\log_2 x)^3 - 6$ ,  $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$ ,  $\|f\| = 33$

---

**219.9.**  $f(x) = (\log_2 x)^4 - 6$ ,  $D_f = (\frac{1}{8}, 4)$ ,  $\|f\| = 75$

---

**219.10.**  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = 3/2$

---

**219.11.**  $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = 4$

---

**219.12.**  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = 7/3$

---

**219.13.**  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = 26/3$

---

**219.14.**  $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = 15/4$

---

**219.15.**  $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x$ ,  $D_f = (1, +\infty)$ ,  $\|f\| = 20$

---

**220.** Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11}.$$

**Wskazówka:** Oszacuj podane wyrażenie osobno w przypadkach  $|x| < 1$  i  $|x| \geq 1$

*Rozwiązanie:*

Oszacujemy wyrażenie definiujące funkcję  $f$  rozważając dwa przypadki:

1° Gdy  $|x| < 1$ , otrzymujemy:

$$\frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11} \leq \frac{6 - 0 + 7}{0 - 1 + 11} = \frac{13}{10}.$$

2° Gdy  $|x| \geq 1$ , otrzymujemy:

$$\frac{6x^6 - x^2 + 7}{8x^8 - x^4 + 11} \leq \frac{6x^6 - 0 + 7x^6}{8x^8 - x^8 + 0} = \frac{13}{7x^2} \leq \frac{13}{7}.$$

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  mamy

$$|f(x)| = f(x) \leq \frac{13}{7},$$

skąd wynika nierówność  $\|f\| \leq 13/7$ .

**221.** Dany jest szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o sumie  $F$ , gdzie funkcje  $f_n$  są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\sin 2^n x}{333^n}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną  $m$ , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja  $F$  jest  $m$ -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $k \leq m$  zachodzi równość  $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ .

*Rozwiązanie:*

Wykażemy, że  $m = 8$ .

Dla liczb całkowitych nieujemnych  $k \leq 8$  otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{2^{kn} \cdot \text{jakiśsinus } 2^n x}{333^n},$$

gdzie  $f^{(0)} = f$ , a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji  $\pm \sin$ ,  $\pm \cos$ . Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{kn}}{333^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{333}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{256}{333}\right)^n < +\infty,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ , a w konsekwencji możliwość 8-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(9)}(x) = \frac{2^{9n} \cos 2^n x}{333^n} = \left(\frac{512}{333}\right)^n \cdot \cos 2^n x,$$

co dla  $x=0$  daje szereg rozbieżny  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{512}{333}\right)^n$ . Zatem szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(9)}$  nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba  $m=9$  nie spełnia warunków zadania.

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy zbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie  $256/333$  bezwzględnie mniejszym od 1 i rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie  $512/333$  większym od 1.

**222.** Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^3 \cdot x)}{n^{20}}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią  $k$  udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  jest jednostajnie zbieżny, ale szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

*Rozwiązanie:*

Najpierw zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n^{3k} \cdot \text{jsin}(n^3 \cdot x)}{n^{20}} = \frac{\text{jsin}(n^3 \cdot x)}{n^{20-3k}},$$

gdzie  $\text{jsin}$  jest jedną z funkcji  $\pm \sin$  lub  $\pm \cos$ . Zatem

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{1}{n^{20-3k}} = n^{3k-20}.$$

Jeżeli szereg liczbowy  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\|$  jest zbieżny, to szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  jest jednostajnie zbieżny.

Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{20-3k}},$$

szereg ten jest zbieżny, o ile  $20-3k > 1$ , czyli dla  $k \leq 6$ .

W szczególności szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$  jest jednostajnie zbieżny.

Jeżeli  $\|f_n^{(k)}\| \not\rightarrow 0$  przy  $n \rightarrow \infty$ , to szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

Taką sytuację mamy np. dla  $k=7$ , gdzie

$$\|f_n^{(7)}\| = n \rightarrow \infty.$$

Wobec tego szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(7)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

**Odpowiedź:** Warunki zadania są spełnione przez  $k=6$ .

**223.** Dany jest szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o sumie  $F$ , gdzie funkcje  $f_n$  są dane wzorami

$$f_n(x) = \frac{\cos n^8 x}{n^{60}}.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną  $m$ , dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja  $F$  jest  $m$ -krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $k \leq m$  zachodzi równość  $F^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ .

*Rozwiązanie:*

Wykażemy, że  $m = 7$ .

Dla liczb całkowitych nieujemnych  $k \leq 7$  otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\text{jakiśsinus } n^8 x}{n^{60-8k}},$$

gdzie  $f^{(0)} = f$ , a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji  $\pm \sin$ ,  $\pm \cos$ . Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{60-8k}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{60-8 \cdot 7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ , a w konsekwencji możliwość 7-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(8)}(x) = n^4 \cos n^8 x,$$

co dla  $x = 0$  daje szereg rozbieżny  $\sum_{n=1}^{\infty} n^4$ . Zatem szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(8)}$  nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba  $m = 8$  nie spełnia warunków zadania.

**224.** Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\left(\binom{3n}{n}\right)^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią  $k$  udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  jest jednostajnie zbieżny, ale szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\binom{2n}{n}^k \cdot \text{j} \sin\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\left(\binom{3n}{n}\right)^4},$$

gdzie  $\text{j} \sin$  jest jedną z funkcji  $\pm \sin$  lub  $\pm \cos$ . Stąd

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{\binom{2n}{n}^k}{\left(\binom{3n}{n}\right)^4}. \quad (1)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4} \quad (2)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{3n+3}{n+1}^4} \cdot \frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{2n}{n}^k} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{2n}{n}^k} \cdot \frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{3n+3}{n+1}^4} = \\ & = \left( \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} \right)^k \cdot \left( \frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1)}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \right)^4 \rightarrow \frac{4^k \cdot 4^4}{27^4} = \frac{2^{2k+8}}{3^{12}} = \left( \frac{2^{k+4}}{3^6} \right)^2 = g. \end{aligned}$$

Ponieważ  $3^6 = 729$ , zachodzą nierówności  $2^9 < 3^6 < 2^{10}$ . Zatem dla  $k = 5$  otrzymujemy  $g < 1$ . Wobec tego na mocy kryterium d'Alemberta szereg liczbowy (2) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(5)}$  jest jednostajnie zbieżny.

Odnosząc powyższe kryterium d'Alemberta do ciągu (1) otrzymujemy  $g > 1$  dla  $k = 6$ , skąd wynika, że ciąg liczbowy (1) jest rozbieżny do  $+\infty$ . W szczególności

$$\|f_n^{(6)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

**Odpowiedź:** Warunki zadania są spełnione przez  $k = 5$ .

**225.** Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią  $k$  udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$  jest jednostajnie zbieżny, ale szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

*Rozwiązanie:*

Niech  $k = 3$ . Wówczas

$$f_n^{(k)}(x) = f_n'''(x) = \frac{(n!)^3 \cdot \sin(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n'''\| = \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'''\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (3)$$

otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^3 \cdot (3n)!}{(3n+3)! \cdot (n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow \frac{1}{27} < 1.$$

Zatem szereg liczbowy (3) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'''$  jest jednostajnie zbieżny.

Ponadto

$$f_n^{(k+1)}(x) = f_n^{(4)}(x) = \frac{(n!)^4 \cdot \cos(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n^{(4)}\| = \frac{(n!)^4}{(3n)!}. \quad (4)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do ciągu (4) otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^4 \cdot (3n)!}{(3n+3)! \cdot (n!)^4} = \frac{(n+1)^4}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow +\infty > 1.$$

Zatem ciąg liczbowy (4) jest rozbieżny do  $+\infty$ , skąd w szczególności

$$\|f_n^{(4)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

**Inne wnioskowanie:** Z kryterium d'Alemberta jak wyżej, szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!}$  jest rozbieżny, więc  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$  nie jest nawet punktowo zbieżny, a co dopiero jednostajnie.