Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 20.05.2021.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

Podsumowanie najważniejszych wiadomości o normie supremum i zbieżności jednostajnej:

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x\in D_f} |f(x)|\,.$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciag funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji f określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0\,.$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g, to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\,.$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli $\|f_n\| \not\to 0$, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n\,.$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

201. $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$, $D_f=\mathbb{R}$

202. $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

203. $f(x)=x^2$, $D_f=(-1,2)$

204. $f(x)=x^3$, $D_f=(-4,3)$

205. $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $D_f=\mathbb{R}$

206. $f(x)=\operatorname{arctg}\sin x$, $D_f=\mathbb{R}$

207. $f(x)=\sin x+\cos x$, $D_f=\mathbb{R}$

208. $f(x)=x^3-x$, $D_f=(-1,1)$

Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

209. $f(x)=\frac{7x^4+11x^2+13}{2x^4+3x^2+5}$, $D_f=\mathbb{R}$

210. $f(x)=\frac{11x^4-7x^2+13}{3x^4-2x^2+5}$, $D_f=\mathbb{R}$

211. $f(x)=\frac{2^x+5^x+8^x}{2^x+4^x+8^x}$, $D_f=\mathbb{R}$

212. $f(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{t^4+1}$, $D_f=(0,+\infty)$

213. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

214. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3+8}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

215. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piątego włącznie.

216. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3^n+1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

217. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot\sin nx+\cos n^2x}{n^8+88}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie.

218. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^{2020}x}{2^n}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

219. W każdym z zadań **219.1-219.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

219.1. $f(x)=7\sin x$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

219.2. $f(x)=7\sin x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

219.3. $f(x)=7\sin^2 x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

219.4. $f(x)=7\sin^3 x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

219.5. $f(x)=\log_2 x-2$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\,8\right)$, $\|f\|=$ ....

219.6. $f(x)=\log_2 x-2$, $D_f=(2,\,32)$, $\|f\|=$ ....

219.7. $f(x)=(\log_2 x)^2-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\,4\right)$, $\|f\|=$ ....

219.8. $f(x)=(\log_2 x)^3-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\,4\right)$, $\|f\|=$ ....

219.9. $f(x)=(\log_2 x)^4-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\,4\right)$, $\|f\|=$ ....

219.10. $f(x)=\sqrt{x^2+3x}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=$ ....

219.11. $f(x)=\sqrt{x^2+8x}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=$ ....

219.12. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+7x^2}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=$ ....

219.13. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+26x^2}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=$ ....

219.14. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+15x^3}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=$ ....

219.15. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+80x^3}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=$ ....

---

220. Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x)=\frac{6x^6-x^2+7}{8x^8-x^4+11}\,.$$

Wskazówka: Oszacuj podane wyrażenie osobno w przypadkach $|x|<1$ i $|x|\geqslant 1$

221. Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\sin 2^n x}{333^n}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

222. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos\left(n^3\cdot x\right)}{n^{20}}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

223. Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\cos n^8 x}{n^{60}}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

224. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos\left(\binom{2n}{n}\cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

225. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos(n!\cdot x)}{(3n)!}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.