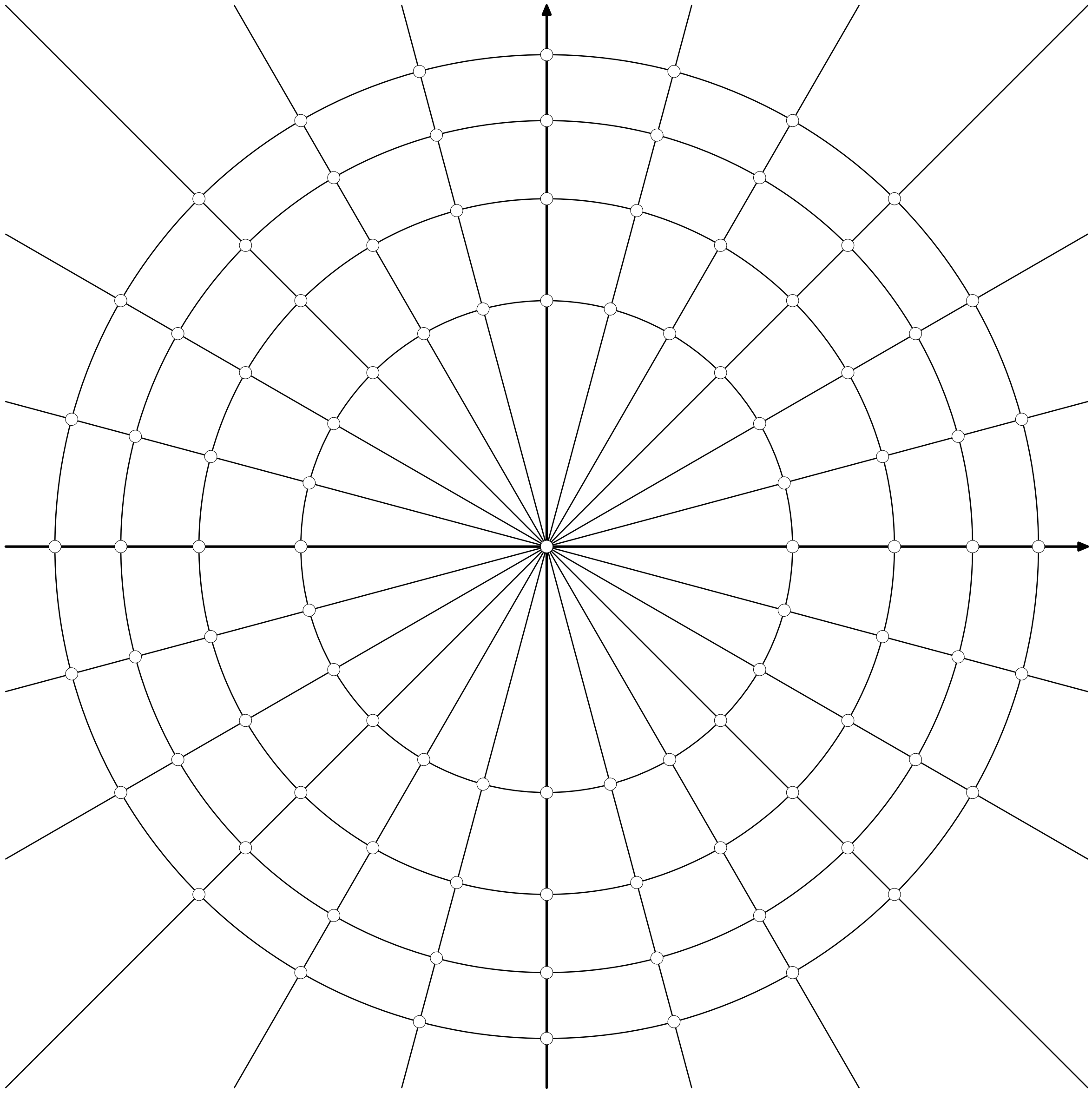
191. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = -4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co $15°$.

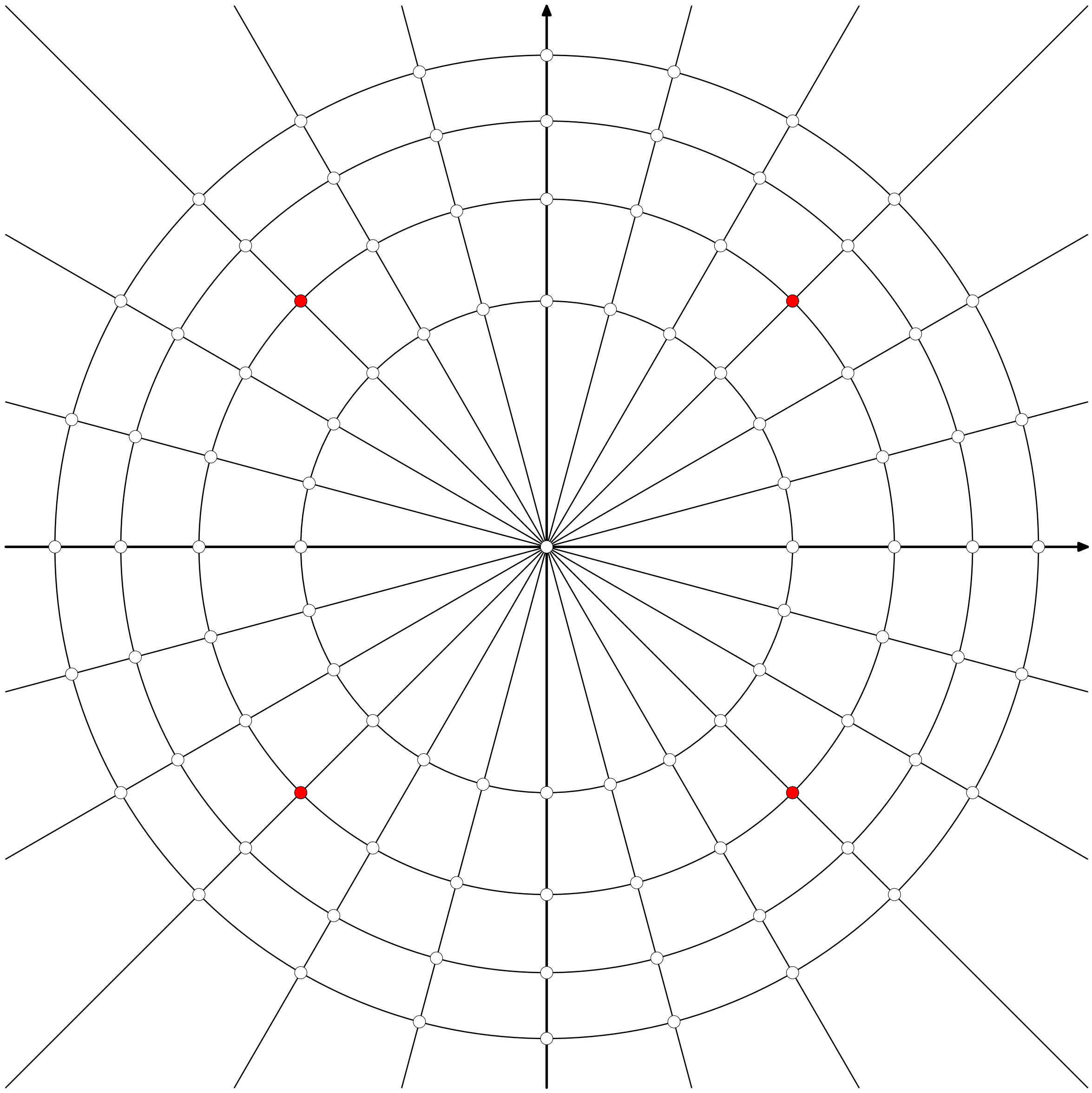


Rozwiązanie:

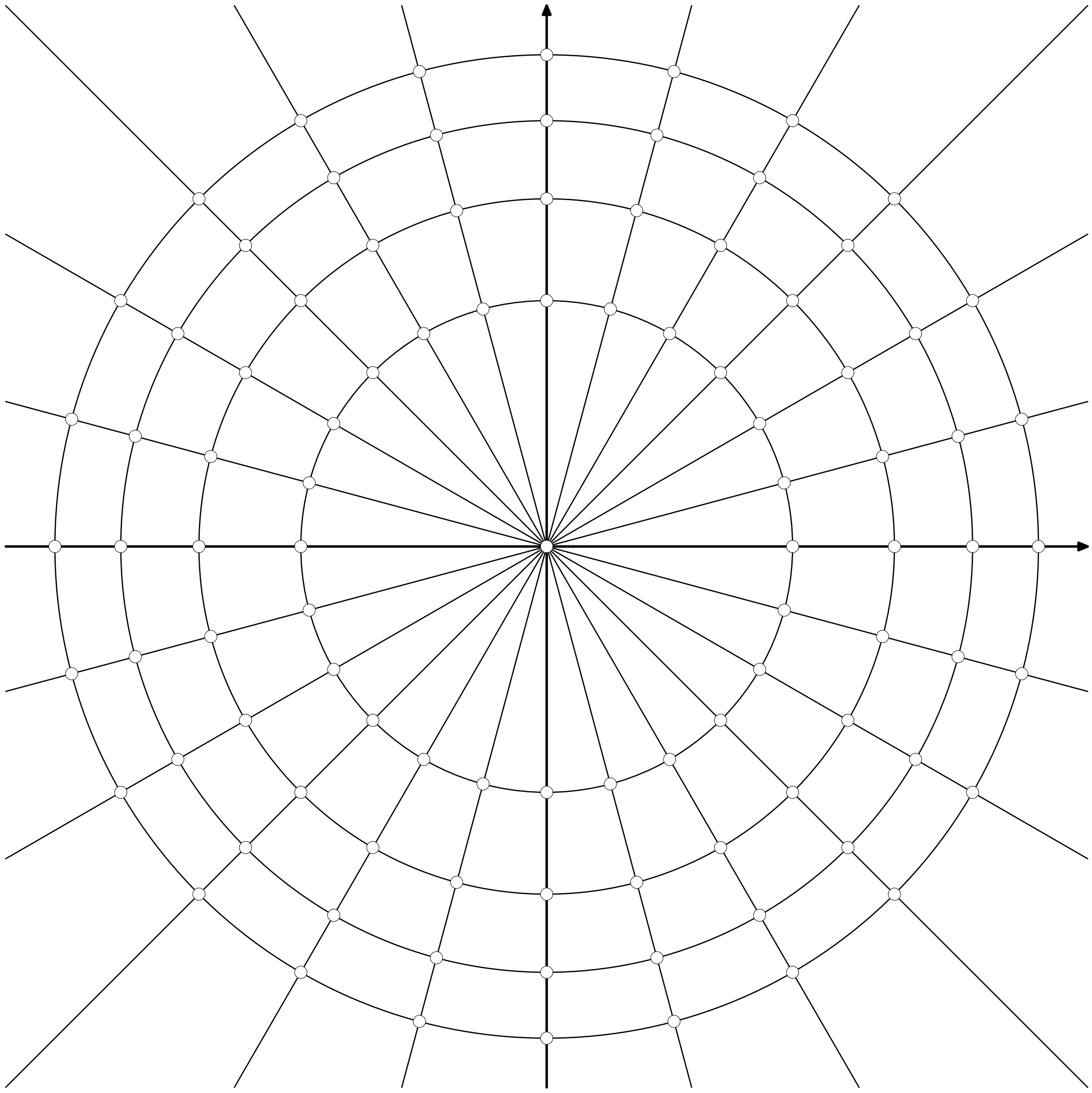
Liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π, w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$. Pozostałe trzy rozwiązania danego w zadaniu równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90°.

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π, a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4+k\pi/2$ dla $k=0,1,2,3$, czyli odpowiednio $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 4 rozwiązania: $\pm_1 1\pm_2 i$.



192. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9=27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



Rozwiązanie:

Przepisujemy dane równanie w postaci

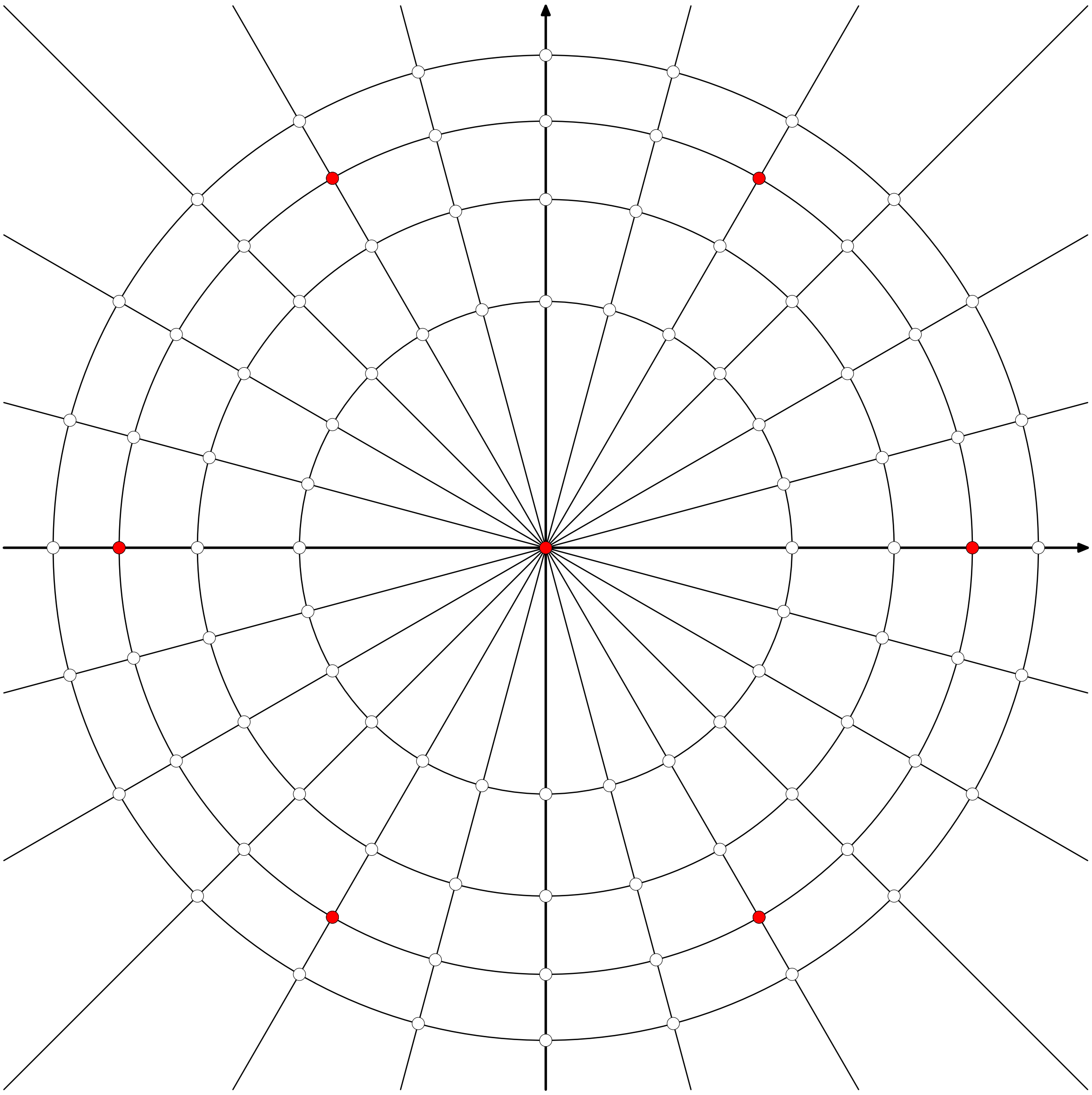
$$z^3 \cdot \left(z^6 - 27\right) = 0\,.$$

Powyższe równanie jest spełnione przez $z=0$ oraz przez takie liczby zespolone z, że $z^6=27$.

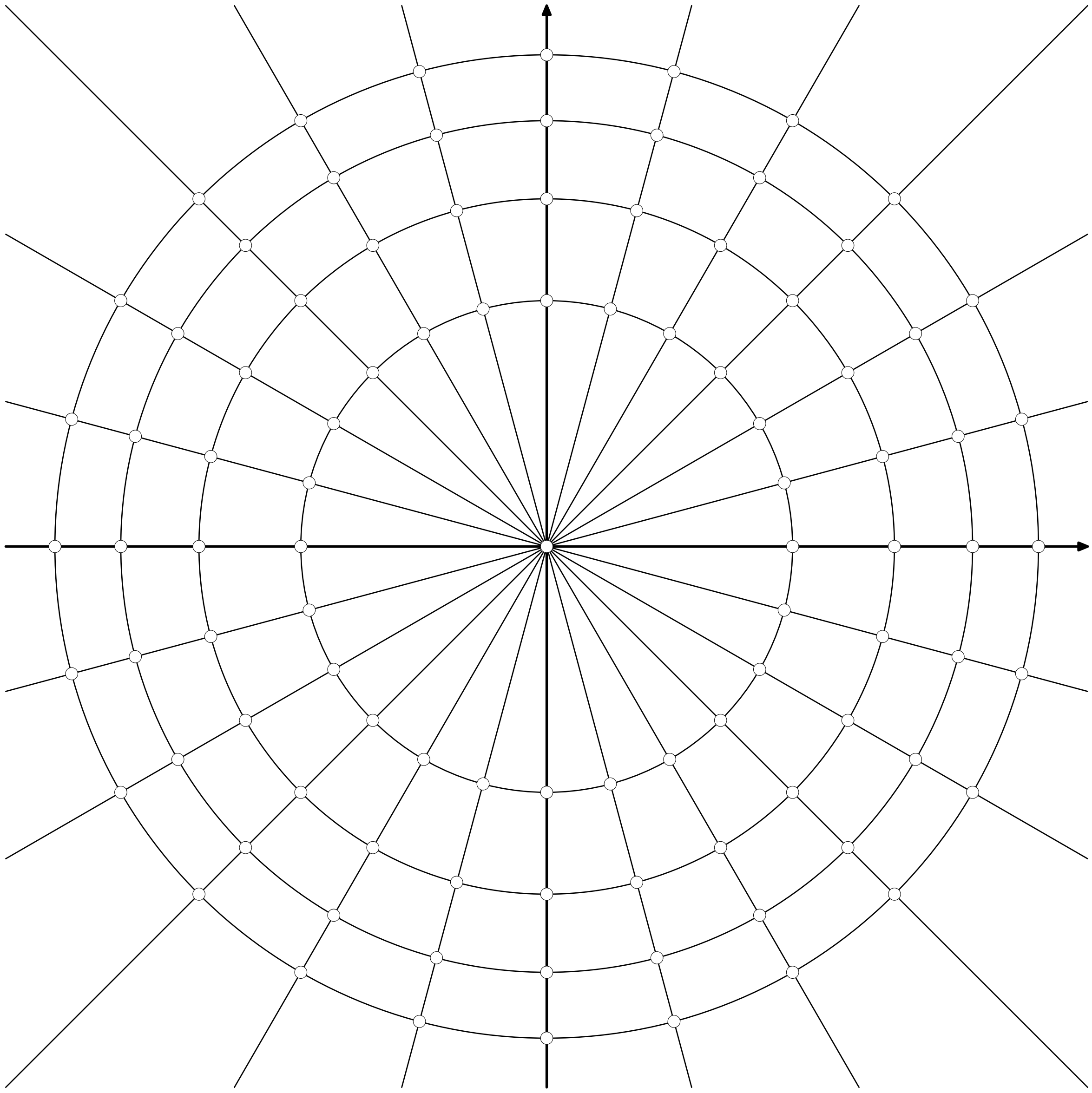
Zauważmy, że jednym z rozwiązań równania $z^6=27$ jest $z=\sqrt{3}$, a pozostałe pięć rozwiązań tego równania leży na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$ co $60°$.

Inaczej: liczba 27 ma moduł 27 i argument 0, a zatem jej pierwiastki szóstego stopnia mają moduł $\sqrt{3}$ i argumenty $2k\pi/6$ dla $k=0,1,2,3,4,5$, czyli odpowiednio 0, $\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $5\pi/3$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 7 rozwiązań: 0, $\pm\sqrt{3}$ oraz $\pm_1 \dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm_2 \dfrac{3i}{2}$.



193. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7+4z^3=8z^4+32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



Rozwiązanie:

Przepisujemy dane równanie w postaci

$$z^3\cdot\left(z^4+4\right)=8\cdot\left(z^4+4\right)\ ,$$

czyli

$$\left(z^3-8\right)\cdot\left(z^4+4\right)=0\,.$$

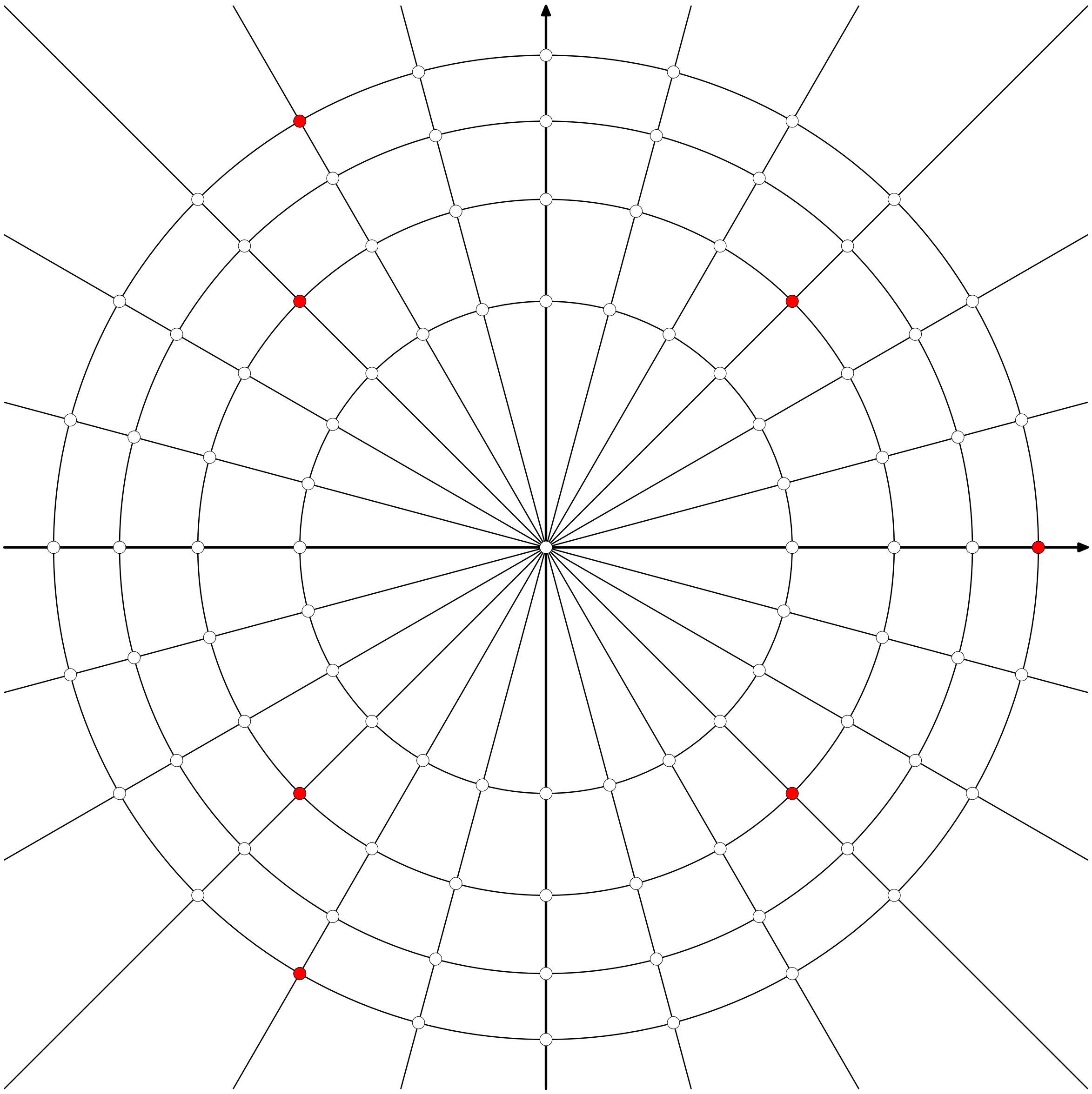
Rozwiązując równanie $z^4+4=0$, czyli $z^4=-4$, stwierdzamy, że liczba zespolona -4 ma moduł 4 i argument π, w związku z czym jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$, a jeden z nich ma argument $\pi/4$. Tym pierwiastkiem jest więc $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$. Pozostałe trzy rozwiązania tego równania leżą na okręgu o promieniu $\sqrt{2}$ co 90°.

Inaczej: liczba -4 ma moduł 4 i argument π, a zatem jej pierwiastki czwartego stopnia mają moduł $\sqrt{2}$ i argumenty $\pi/4+k\pi/2$ dla $k=0,1,2,3$, czyli odpowiednio $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$.

Z kolei rozwiązując równanie $z^3-8=0$, czyli $z^3=8$, zauważamy, że jego rozwiązaniem jest $z=2$, a pozostałe dwa rozwiązania tego równania leżą na okręgu o promieniu 2 co 120°.

Inaczej: liczba 8 ma moduł 8 i argument 0, a zatem jej pierwiastki trzeciego stopnia mają moduł 2 i argumenty $2k\pi/3$ dla $k=0,1,2$, czyli odpowiednio 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$.

Odpowiedź: Dane równanie ma 7 rozwiązań: $\pm_1 1\pm_2 i$, 2 oraz $-1\pm\sqrt{3}i$.



194. Obliczyć wartość całki $\int\limits_0^\pi \sin^7 x\,dx$. Przedstawić wynik w postaci ułamka nieskracalnego o dwucyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Sposób I

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z=\cos x+i\sin x\,,$$

co daje

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx, \qquad \sin nx=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}\,.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^7 x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^7=\frac{z^7-7z^5+21z^3-35z+35z^{-1}-21z^{-3}+7z^{-5}-z^{-7}}{-128i}=$$

$$=-\frac{\sin 7x}{64}+\frac{7\sin 5x}{64}-\frac{21\sin 3x}{64}+\frac{35\sin x}{64}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę:

$$\int\limits_0^\pi \sin^7 x\,dx=\int\limits_0^\pi -\frac{\sin 7x}{64}+\frac{7\sin 5x}{64}-\frac{21\sin 3x}{64}+\frac{35\sin x}{64}\,dx=$$

$$=\frac{\cos 7x}{7\cdot 64}-\frac{7\cos 5x}{5\cdot 64}+\frac{21\cos 3x}{3\cdot 64}-\frac{35\cos x}{64}\Bigg|_{x=0}^{\pi}=\frac{\cos 7x}{7\cdot 64}-\frac{7\cos 5x}{5\cdot 64}+\frac{7\cos 3x}{64}-\frac{35\cos x}{64}\Bigg|_{x=0}^{\pi}=$$

$$=\frac{\cos 7\pi}{7\cdot 64}-\frac{7\cos 5\pi}{5\cdot 64}+\frac{7\cos 3\pi}{64}-\frac{35\cos \pi}{64}-\frac{\cos 0}{7\cdot 64}+\frac{7\cos 0}{5\cdot 64}-\frac{7\cos 0}{64}+\frac{35\cos 0}{64}=$$

$$=-\frac{1}{7\cdot 64}+\frac{7}{5\cdot 64}-\frac{7}{64}+\frac{35}{64}-\frac{1}{7\cdot 64}+\frac{7}{5\cdot 64}-\frac{7}{64}+\frac{35}{64}=\frac{1}{32}\cdot\left(-\frac{1}{7}+\frac{7}{5}-7+35\right)=$$

$$=\frac{1}{32}\cdot\left(-\frac{1}{7}+\frac{7}{5}+28\right)=\frac{1}{32}\cdot\left(-\frac{1}{7}+\frac{7}{5}+28\right)=\frac{-5+49+980}{1120}=\frac{1024}{1120}=\frac{32}{35}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość 32/35.

Sposób II

Podstawienie $t=\cos x$ i formalnie $dt=-\sin x\,dx$ prowadzi do

$$\int\limits_0^\pi \sin^7 x\,dx=-\int\limits_1^{-1}\left(1-t^2\right)^3\,dt=\int\limits_{-1}^{1}-t^6+3t^4-3t^2+1\,dt=2\cdot\int\limits_0^1 -t^6+3t^4-3t^2+1\,dt=$$

$$=2\cdot\left(-\frac{t^7}{7}+\frac{3t^5}{5}-t^3+t\right)\Bigg|_{t=0}^{1}=2\cdot\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right)=2\cdot\frac{-5+21}{35}=2\cdot\frac{16}{15}=\frac{32}{35}\,.$$

195. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{\pi/6} \cos^6 x\,dx$.

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z=\cos x+i\sin x$. Wówczas

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx, \qquad \cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$

Zatem

$$\cos^6 x=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^6=\frac{z^6+6z^4+15z^2+20+15z^{-2}+6z^{-4}+z^{-6}}{64}=$$

$$=\frac{\cos 6x}{32}+\frac{3\cos 4x}{16}+\frac{15\cos 2x}{32}+\frac{5}{16}\,.$$

Wobec tego

$$\int\limits_0^{\pi/6} \cos^6 x\,dx=\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos 6x}{32}+\frac{3\cos 4x}{16}+\frac{15\cos 2x}{32}+\frac{5}{16}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos 6x}{32}+\frac{3\cos 4x}{16}+\frac{15\cos 2x}{32}\,dx+\int\limits_0^{\pi/6} \frac{5}{16}\,dx=\frac{\sin 6x}{192}+\frac{3\sin 4x}{64}+\frac{15\sin 2x}{64}\Bigg|_{x=0}^{\pi/6}+\frac{\pi}{6}\cdot\frac{5}{16}=$$

$$=\frac{\sin\pi}{192}+\frac{3\sin(2\pi/3)}{64}+\frac{15\sin(\pi/3)}{64}+\frac{5\pi}{96}=\frac{0}{192}+\frac{3\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{64}+\frac{15\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{64}+\frac{5\pi}{96}=$$

$$=\frac{18\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{64}+\frac{5\pi}{96}=\frac{9\sqrt{3}}{64}+\frac{5\pi}{96}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{5\pi}{96}+\frac{9\sqrt{3}}{64}$.

196. Obliczyć całkę $\int\limits_0^{\pi} \sin^8 x\,dx$.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z=\cos x+i\sin x\,,$$

co daje

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx, \qquad \sin x=\frac{z-z^{-1}}{2i}, \qquad \cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^8 x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^8=\frac{z^8-8z^6+28z^4-56z^2+70-56z^{-2}+28z^{-4}-8z^{-6}+z^{-8}}{256}=$$

$$=\frac{\cos 8x}{128}-\frac{\cos 6x}{16}+\frac{7\cos 4x}{32}-\frac{7\cos 2x}{16}+\frac{35}{128}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^\pi \sin^8 x\,dx=\int_0^\pi \frac{\cos 8x}{128}-\frac{\cos 6x}{16}+\frac{7\cos 4x}{32}-\frac{7\cos 2x}{16}+\frac{35}{128}\,dx=\frac{35\pi}{128}\,.$$

Odpowiedź

Dana całka ma wartość $35\pi/128$.

197. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z=\cos x+i\sin x$, co daje

$$z^n=\cos nx+i\sin nx,\qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx,\qquad \cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2},\qquad \sin nx=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}\,.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^2 x\cdot\cos^4 x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\cdot\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^4=\frac{(z^2-2+z^{-2})\cdot(z^4+4z^2+6+4z^{-2}+z^{-4})}{-64}=$$

$$=\frac{z^6+2z^4-z^2-4-z^{-2}+2z^{-4}+z^{-6}}{-64}=-\frac{\cos 6x}{32}-\frac{\cos 4x}{16}+\frac{\cos 2x}{32}+\frac{1}{16}\,.$$

Inna wersja najbardziej uciążliwego fragmentu powyższych rachunków:

$$\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\cdot\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^4=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2=\left(\frac{z^2-z^{-2}}{4i}\right)^2\cdot\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{(z^4-2+z^{-4})\cdot(z^2+2+z^{-2})}{-64}=\frac{z^6+2z^4-z^2-4-z^{-2}+2z^{-4}+z^{-6}}{-64}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx=\int_0^{2\pi} -\frac{\cos 6x}{32}-\frac{\cos 4x}{16}+\frac{\cos 2x}{32}+\frac{1}{16}\,dx=\frac{\pi}{8}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\pi/8$.

198. Udowodnić nierówność $\int\limits_0^{4\pi} \cos^{10} x\,dx < \pi$.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z = \cos x + i\sin x\,,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i\sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i\sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}\,.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\cos^{10} x = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{10} =$$

$$= \frac{z^{10}+10z^8+45z^6+120z^4+210z^2+252+210z^{-2}+120z^{-4}+45z^{-6}+10z^{-8}+z^{-10}}{1024} =$$

$$= \frac{\cos 10x}{512} + \frac{5\cos 8x}{256} + \frac{45\cos 6x}{512} + \frac{15\cos 4x}{64} + \frac{105\cos 2x}{256} + \frac{63}{256}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int\limits_0^{4\pi} \cos^{10} x\,dx = \int\limits_0^{4\pi} \frac{\cos 10x}{512} + \frac{5\cos 8x}{256} + \frac{45\cos 6x}{512} + \frac{15\cos 4x}{64} + \frac{105\cos 2x}{256} + \frac{63}{256}\,dx = \frac{63\pi}{64} < \pi\,.$$

199. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f''(x) = \cos^4 x \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,,$$

a ponadto $f(0) = f(\pi) = 0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i\sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i\sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i\sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}\,.$$

Zatem

$$\cos^4 x = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^4 = \frac{z^4+4z^2+6+4z^{-2}+z^{-4}}{16} = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}\,.$$

W konsekwencji

$$f'(x) = \int \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}\,dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C$$

oraz

$$f(x) = \int \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C\,dx = -\frac{\cos 4x}{128} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{3x^2}{16} + Cx + D\,.$$

Z warunku $f(0)=0$ otrzymujemy
$$-\frac{1}{128}-\frac{1}{8}+D=0\,,$$
skąd $\mathbf{D=17/128}$. Natomiast z warunku $f(\pi)=0$ otrzymujemy
$$-\frac{1}{128}-\frac{1}{8}+\frac{3\pi^2}{16}+C\pi+\frac{17}{128}=0\,,$$
co daje $\mathbf{C=-3\pi/16}$.

Szukana funkcja jest więc dana wzorem
$$\mathbf{f(x)=-\frac{\cos 4x}{128}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{3x^2}{16}-\frac{3\pi x}{16}+\frac{17}{128}\,,}$$
a przy tym
$$\mathbf{f(2\pi)}=-\frac{\cos 8\pi}{128}-\frac{\cos 4\pi}{8}+\frac{3(2\pi)^2}{16}-\frac{3\pi(2\pi)}{16}+\frac{17}{128}=\mathbf{\frac{3\pi^2}{8}}\,.$$

200. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<7$, że $\int\limits_a^7 \frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ
$$\int\limits_a^7 \frac{dx}{x^2+1}=\mathrm{arctg}x\Big|_{x=a}^{7}=\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}a\,,$$
pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie
$$\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}a=\frac{\pi}{4}=\mathrm{arctg}1\,,$$
czyli
$$\mathrm{arctg}a=\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}1\,.$$
Ponieważ $\mathrm{arctg}t$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ti$, otrzymujemy
$$\mathrm{arctg}a=\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}1=\mathrm{arctg}7+\mathrm{arctg}(-1)=\arg(1+7i)+\arg(1-i)=$$
$$=\arg\left((1+7i)\cdot(1-i)\right)+2k\pi=\arg\left(8+6i\right)+2k\pi=\arg\left(1+\frac{3}{4}i\right)+2k\pi=\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+2k\pi\,,$$
skąd po uwzględnieniu nierówności
$$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arctg}\frac{3}{3}<\frac{\pi}{2}$$
i
$$0<\mathrm{arctg}7-\mathrm{arctg}1<\frac{\pi}{2}$$
wynika $k=0$ oraz $a=3/4$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a=3/4$.