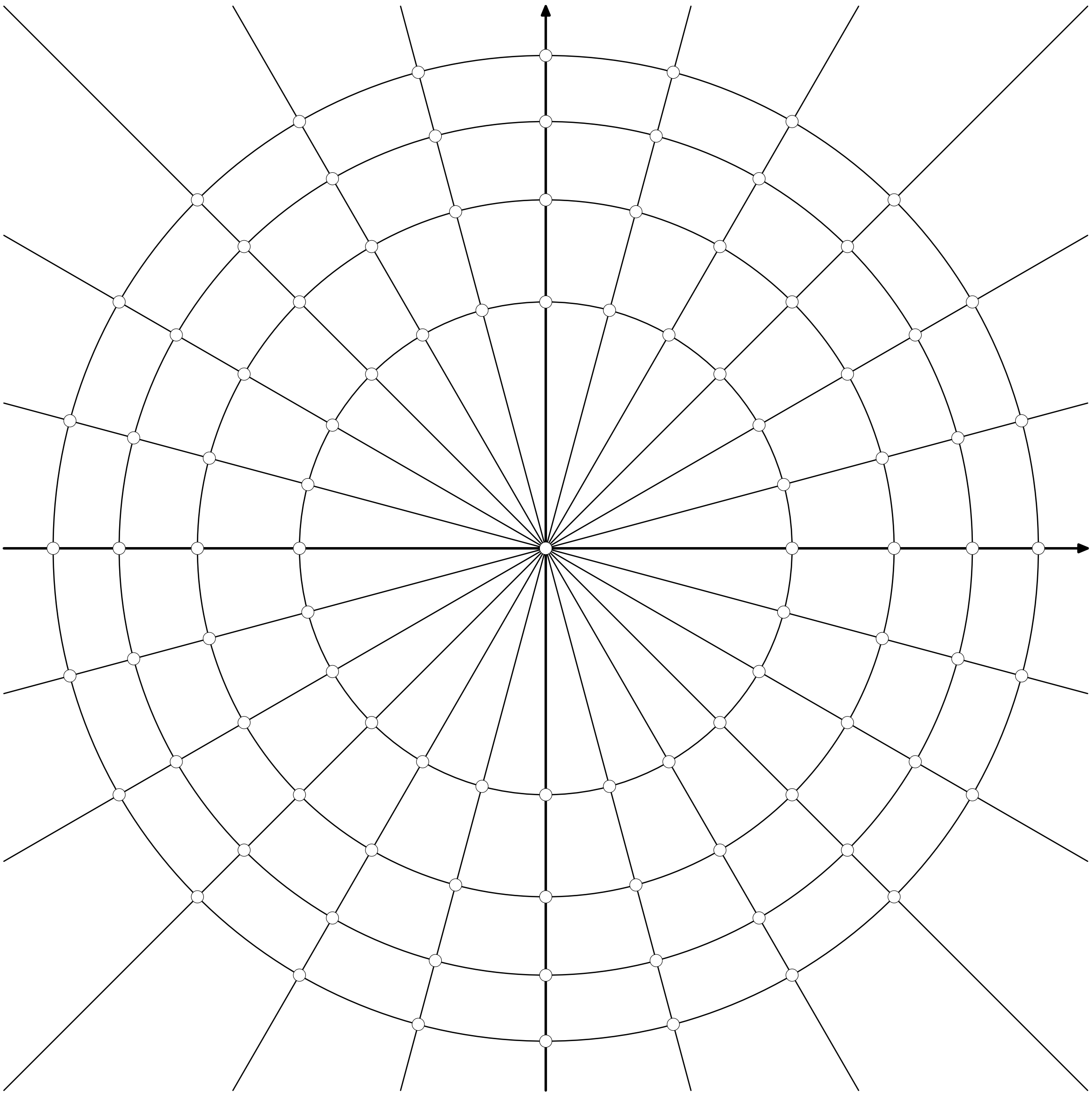
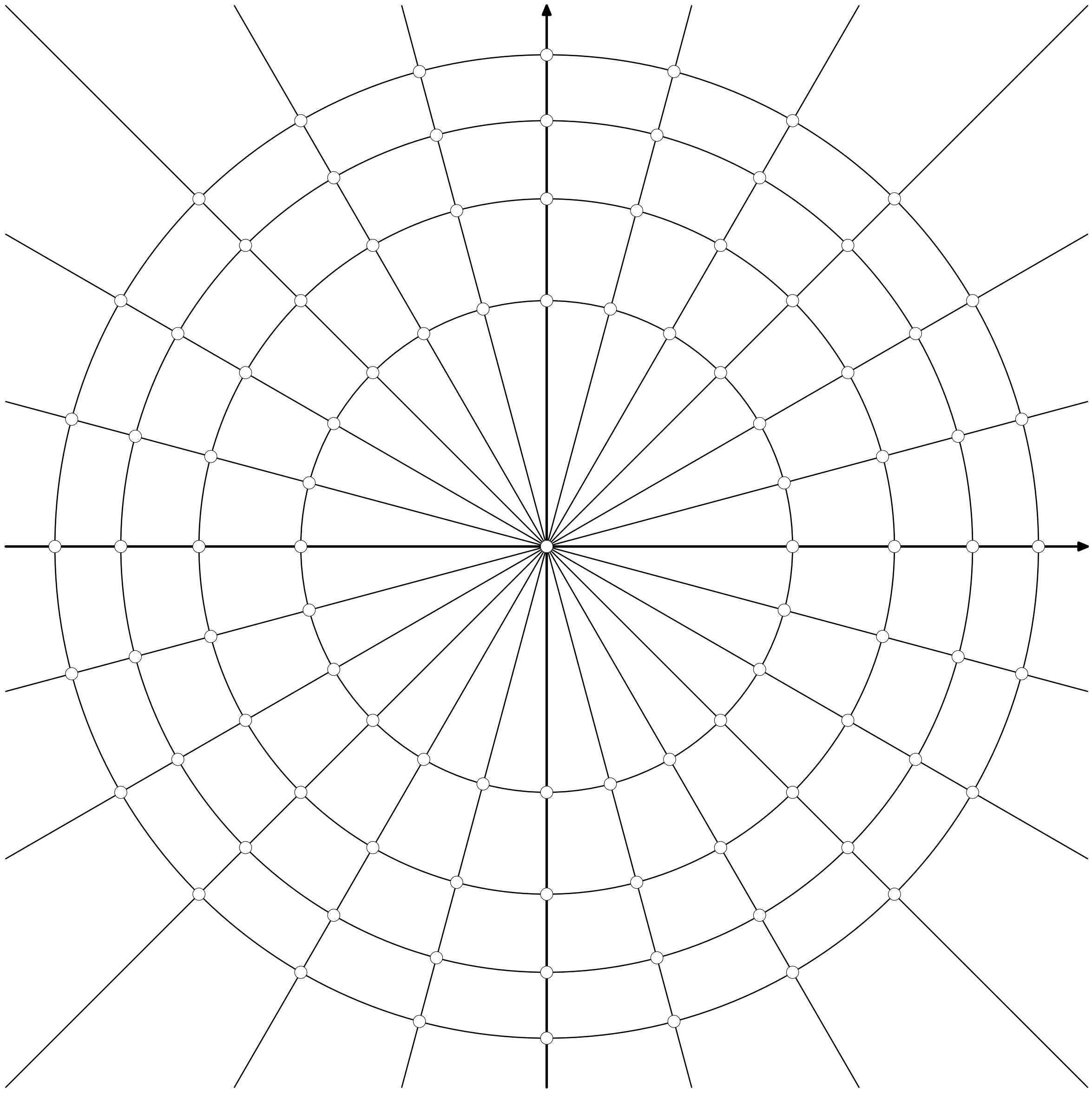
Zadania do omówienia na konwersatorium[1]
we wtorek 11.05.2021 (od godz. 11:15).
Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

191. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = -4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.

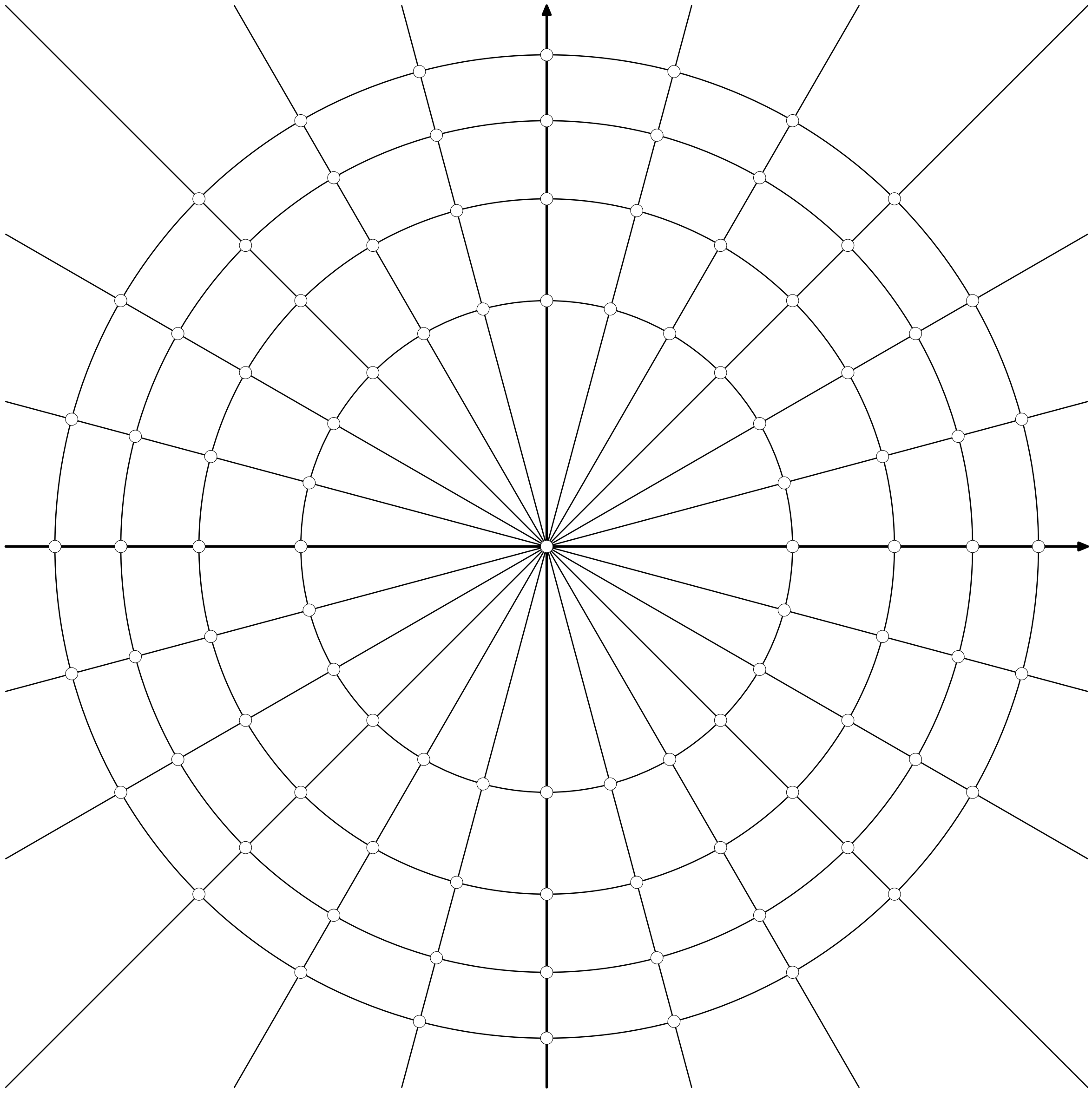


[1]Wykład rozpocznie się w formie konwersatorium. Omówimy niniejszą listę, a jak zostanie czasu, to będziemy kontynuować wykład (ciągi i szeregi funkcyjne).

192. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9=27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



193. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7+4z^3=8z^4+32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n=1,2,3,4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15°.



194. Obliczyć wartość całki $\int\limits_0^{\pi} \sin^7 x\,dx$. Przedstawić wynik w postaci ułamka nieskracalnego o dwucyfrowym liczniku i mianowniku.

195. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{\pi/6} \cos^6 x\,dx$.

196. Obliczyć całkę $\int\limits_0^{\pi} \sin^8 x\,dx$.

197. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

198. Udowodnić nierówność $\int\limits_0^{4\pi} \cos^{10} x\,dx < \pi$.

199. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f''(x)=\cos^4 x \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,,$$

a ponadto $f(0)=f(\pi)=0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

200. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a<7$, że $\int\limits_a^7 \frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$.

Kolokwium nr 4 (wtorek 18 maja 2021): materiał zadań 1–200.
11:15-12:15 – quiz na Moodlu (60 minut)
12:20-13:00 – dwa zadania otwarte (40 minut)
13:10-13:45 – wykład (35 minut)

Przed rozpoczęciem kolokwium należy dołączyć do spotkania w Teamsach na kanale wykładu i włączyć kamerę.

Omówimy też
wybrane zadania z kolokwium specjalnego z 27 kwietnia 2021 r.

A. Podaj taką liczbę naturalną k oraz taki ułamek nieskracalny a/b reprezentujący liczbę wymierną dodatnią, że kres górny zbioru tych wartości rzeczywistych parametru p, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(12n)! \cdot (n!)^k \cdot p^n}{((2n)!)^7 \cdot ((3n)!)^3 \cdot ((4n)!)^2}$$

jest zbieżny, jest równy a/b.

B. Podaj kres dolny zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla każdych trzech ciągów (a_n), (b_n), (c_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^4 = 125 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^4 = 20$$

zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n \leqslant C$$

C. Podaj kres dolny zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla każdych trzech ciągów (a_n), (b_n), (c_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 16 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 27 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^6 = 64$$

zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n \leqslant C$$

D. Wykres funkcji ciągłej $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tworzą ramiona trójkątów równoramiennych w okolicy argumentów naturalnych, a poza tym funkcja f jest zerowa. Dokładniej:

$$f(0) = 0\,,$$

$$f(n) = 2^n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

$$f\left(n - \frac{1}{2 \cdot 16^n}\right) = f\left(n + \frac{1}{2 \cdot 16^n}\right) = 0 \text{ dla } \ n \in \mathbb{N}\,,$$

a pomiędzy podanymi wyżej punktami funkcja f jest liniowa. Podaj wartości całek:

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_0^{\infty} (f(x))^2\,dx \qquad \int_0^{\infty} (f(x))^3\,dx$$