

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach w czwartek 6.05.2021.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.**

177. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n}{n!}.$$

178. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}.$$

179. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}.$$

180. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n}.$$

181. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

182. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{(n!)^n}.$$

183. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}.$$

184. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

185. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n \cdot 64^n} \cdot x^{3n}}{5n+7}.$$

186. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+2)^n \cdot x^n}{(7n+3)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

187. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{22} \cdot e^{x^7}.$$

Obliczyć $f^{(k)}(0)$ dla $k = 50, 51, 52, \dots, 60$.

188. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną dla $x \neq 0$ wzorem

$$f(x) = \frac{e^x - \sum_{n=0}^{2020} \frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}.$$

Obliczyć $f(0)$ oraz $f'(0)$.

189. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Wskazówka: Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

W tym celu zastanowić się, jakiego prostego szeregu pochodną jest ten szereg lub szereg bardzo do niego zbliżony.

W poniższym zadaniu masz podany szkielet rozwiązania. Twoje zadanie to uzupełnić brakujące fragmenty w miejscu kropek.

190. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}. \quad (1)$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział
 Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{1 - x^3} dx = (c-b) \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}} \right) - \frac{(b+c)\ln|1-x|}{3} + \frac{(b+c)\ln(x^2+x+1)}{6} - \frac{a\ln|1-x^3|}{3} + C$$

dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$ otrzymujemy

$$f(x) = \int f'(x)dx = \dots\dots\dots \quad (2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x = \dots\dots\dots$ Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots + C = \dots\dots\dots + C.$$

Stąd

$$C = \dots\dots\dots$$

i ostatecznie

$$f(x) = \dots\dots\dots \quad (3)$$

Przyjmując $x = \dots\dots\dots$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

.....