

164. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} \geq \frac{(2n+1) \cdot (2n+3)}{(3n+2) \cdot (3n+5) \cdot (3n+8)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościami

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{3n-1} &\geq \frac{2n+3}{3n+8}, \\ (2n-1) \cdot (3n+8) &\geq (2n+3) \cdot (3n-1), \\ 6n^2 + 13n - 8 &\geq 6n^2 + 7n - 3, \\ 6n &\geq 5, \end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

165. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 2}.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Spełnienie tego warunku jest oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\frac{n}{n^2+2} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
W celu udowodnienia tego warunku udowodnimy nierówność

$$\frac{n}{n^2+2} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+2},$$

która jest równoważna kolejnym nierównościami:

$$\begin{aligned} n \cdot (n^2 + 2n + 3) &\geq (n+1) \cdot (n^2 + 2), \\ n^3 + 2n^2 + 3n &\geq n^3 + n^2 + 2n + 2, \\ n^2 + n &\geq 2, \end{aligned}$$

co jest spełnione dla każdego $n \geq 1$.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

166. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)}.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{7}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{10}{n}\right)} &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 0. \end{aligned}$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} \geq \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10) \cdot (3n+13)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościami

$$\begin{aligned}\frac{n}{3n+1} &\geq \frac{n+3}{3n+13}, \\ n \cdot (3n+13) &\geq (n+3) \cdot (3n+1), \\ 3n^2 + 13n &\geq 3n^2 + 10n + 3, \\ 3n &\geq 3, \\ n &\geq 1,\end{aligned}$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

167. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy udowodnić zbieżność danego szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{100}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{n}}{n+100} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+101}, \quad (*)$$

co kolejno jest równoważne nierównościami

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \cdot (n+101) &\geq \sqrt{n+1} \cdot (n+100), \\ n \cdot (n+101)^2 &\geq (n+1) \cdot (n+100)^2, \\ n \cdot (n^2 + 202n + 10201) &\geq (n+1) \cdot (n^2 + 200n + 10000), \\ n^3 + 202n^2 + 10201n &\geq n^3 + 201n^2 + 10200n + 10000, \\ n^2 + n &\geq 10000,\end{aligned}$$

$$n \cdot (n+1) \geq 100 \cdot 100,$$

skąd wynika, że nierówność (*) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geq 100$.

Zatem szereg $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}$ spełnia warunki kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, wobec czego jest zbieżny.

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}$ jest zbieżny.

168. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right).$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

- 1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.
- 2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
- 3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Warunki te stają się oczywiste po zapisaniu wartości bezwzględnych wyrazów szeregu w innej postaci:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

169. Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2,$$

obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{2} + \frac{1}{201} + \frac{1}{203} + \dots + \frac{1}{399} - \frac{1}{4} + \frac{1}{401} + \frac{1}{403} + \dots + \frac{1}{599} - \frac{1}{6} + \\ & + \frac{1}{601} + \frac{1}{603} + \dots + \frac{1}{799} - \frac{1}{8} + \frac{1}{801} + \frac{1}{803} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{10} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1003} + \dots \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co 101-szą sumę częściową. Otrzymujemy

$$S_{101n} = \sum_{i=1}^{100n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{100n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^{100} f(x) dx = \\ &= \int_1^{100} \frac{dx}{2x} = \frac{\ln|x|}{2} \Big|_{x=1}^{100} = \frac{\ln 100}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 100}{2} = \ln 10. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{101n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{100n} \frac{1}{2i-1} \right) = \ln 2 + \ln 10 = \ln 20.$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $\ln 20 \approx 2,9957$.

170. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, oblicz jego sumę.

$$\begin{array}{lll} \text{(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{7n+10} & \text{(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{3n^2+n} & \text{(C)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} \\ \text{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2+1} & \text{(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2+1)}{77n-1} & \text{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{2011n+2012} \end{array}$$

Rozwiązanie:

Szeregiem zbieżnym jest szereg (C).

Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych. W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0-0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{2n-1}{n(n+1)} \geq \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)},$$

czyli

$$\frac{2n-1}{n} \geq \frac{2n+1}{n+2},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$(2n-1)(n+2) \geq (2n+1)n$$

$$2n^2 + 3n - 2 \geq 2n^2 + n$$

$$2n \geq 2$$

$$n \geq 1,$$

a to jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych n .

Zatem na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych szereg (C) jest zbieżny.

W celu obliczenia sumy szeregu (C) rozkładamy jego wyrazy na ułamki proste:

$$\frac{2n-1}{n^2+n} = \frac{2n-1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$2n-1 = A(n+1) + Bn$$

$$2n-1 = An + A + Bn$$

$$2 = A + B, \quad -1 = A$$

$$A = -1, \quad B = 3.$$

Wykorzystujemy otrzymany rozkład do rozłożenia szeregu na sumę dwóch szeregów przypominających szereg anharmoniczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-(-1)^n}{n} + \frac{3 \cdot (-1)^n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

W drugim szeregu zmieniamy numerację podstawiając $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3 \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - 1 \right) = 4\ln 2 - 3.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy ze znajomości sumy szeregu anharmonicznego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Odpowiedź: Suma szeregu (C) jest równa $4\ln 2 - 3$.

171. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (p^2 - 3)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 5)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (-\sqrt{6}, -2] \cup [2, \sqrt{6})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 8)^n}{n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in (-3, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, 3)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^2 - 10)^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [-\sqrt{11}, -3] \cup [3, \sqrt{11}]$

172. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n) **Z**

b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ **N**

c) ciągu (b_n) **N**

d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ **R**

e) ciągu $(a_n + b_n)$ **N**

f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ **R**

g) ciągu $(c_n + d_n)$ **R**

h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$ **R**

i) ciągu $(a_n + c_n)$ **Z**

j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ **N**

k) ciągu $(a_n + d_n)$ **R**

l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$ **R**

m) ciągu $(b_n + c_n)$ **N**

n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ **N**

o) ciągu $(b_n + d_n)$ **N**

p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$ **N**

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

173. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdzie

a) $g = -3$ **R**

b) $g = -1$ **R**

c) $g = -1/3$ **R**

d) $g = 0$ **N**

e) $g = 1/3$ **R**

f) $g = 1$ **R**

g) $g = 3$ **R**

174. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g = -3$ **R**

b) $g = -1$ **N**

c) $g = -1/3$ **Z**

d) $g = 0$ **Z**

e) $g = 1/3$ **Z**

f) $g = 1$ **N**

g) $g = 3$ **R**

175. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g = -3$ **Z**

b) $g = -1$ **N**

c) $g = -1/3$ **R**

d) $g = 0$ **R**

e) $g = 1/3$ **R**

f) $g = 1$ **N**

g) $g = 3$ **Z**

176. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, gdzie

a) $g = -3$ **X**

b) $g = -1$ **X**

c) $g = -1/3$ **X**

d) $g = 0$ **Z**

e) $g = 1/3$ **Z**

f) $g = 1$ **N**

g) $g = 3$ **R**