**Kolokwium 5, 1.06.2021, godz. 12:20-13:00**

## Zadanie 6 (wersja 0)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+29} - \frac{1}{6x-5}\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie $w$ jest liczbą wymierną dodatnią zapisaną w postaci ułamka nieskracalnego.

*Rozwiązanie:*

Obliczamy daną w zadaniu całkę

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+29} - \frac{1}{6x-5}\,dx = \left(\frac{\ln(2x+1)}{2} - \frac{\ln(3x+29)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\Bigg|_{x=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(2x+1)}{2} - \frac{\ln(3x+29)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\right) - \frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 32}{3} + \frac{\ln 1}{6} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \ln\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{3x+29}\cdot\sqrt[6]{6x-5}}\right) - \frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{(2x+1)^3}{(3x+29)^2\cdot(6x-5)}}\right) - \frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln\sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2\cdot 6}} - \frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}\,.$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln\frac{4}{3}$.

## Zadanie 6 (wersja 1)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{2x+25} - \frac{1}{3x+1} - \frac{1}{6x-5}\, dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie $w$ jest liczbą wymierną dodatnią zapisaną w postaci ułamka nieskracalnego.

*Rozwiązanie:*

Obliczamy daną w zadaniu całkę

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{2x+25} - \frac{1}{3x+1} - \frac{1}{6x-5}\, dx = \left(\frac{\ln(2x+25)}{2} - \frac{\ln(3x+1)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\Bigg|_{x=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(2x+25)}{2} - \frac{\ln(3x+1)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\right) - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 4}{3} + \frac{\ln 1}{6} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \ln \frac{\sqrt{2x+25}}{\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[6]{6x-5}}\right) - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 4}{3} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \sqrt[6]{\frac{(2x+25)^3}{(3x+1)^2\cdot(6x-5)}}\right) - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 4}{3} =$$

$$= \ln \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2\cdot 6}} - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 4}{3} =$$

$$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 4}{3} =$$

$$= \ln 2 - \ln 9 = \ln\frac{2}{9}\,.$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln\frac{2}{9}$.

## Zadanie 6 (wersja 2)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{2x+25} - \frac{1}{3x+29} - \frac{1}{6x-5}\, dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie $w$ jest liczbą wymierną dodatnią zapisaną w postaci ułamka nieskracalnego.

*Rozwiązanie:*

Obliczamy daną w zadaniu całkę

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{2x+25} - \frac{1}{3x+29} - \frac{1}{6x-5}\, dx = \left(\frac{\ln(2x+25)}{2} - \frac{\ln(3x+29)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\Bigg|_{x=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(2x+25)}{2} - \frac{\ln(3x+29)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\right) - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 32}{3} + \frac{\ln 1}{6} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \ln \frac{\sqrt{2x+25}}{\sqrt[3]{3x+29}\cdot\sqrt[6]{6x-5}}\right) - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \sqrt[6]{\frac{(2x+25)^3}{(3x+29)^2\cdot(6x-5)}}\right) - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2\cdot 6}} - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 27}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln 4 - \ln 9 = \ln \frac{4}{9}\,.$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln \frac{4}{9}$.

## Zadanie 6 (wersja 3)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x+73} - \frac{1}{3x+1} - \frac{1}{6x-5}\, dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie $w$ jest liczbą wymierną dodatnią zapisaną w postaci ułamka nieskracalnego.

*Rozwiązanie:*

Obliczamy daną w zadaniu całkę

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x+73} - \frac{1}{3x+1} - \frac{1}{6x-5}\, dx = \left(\frac{\ln(2x+73)}{2} - \frac{\ln(3x+1)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\Bigg|_{x=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(2x+73)}{2} - \frac{\ln(3x+1)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\right) - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 4}{3} + \frac{\ln 1}{6} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \ln \frac{\sqrt{2x+73}}{\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[6]{6x-5}}\right) - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 4}{3} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \sqrt[6]{\frac{(2x+73)^3}{(3x+1)^2\cdot(6x-5)}}\right) - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 4}{3} =$$

$$= \ln \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2\cdot 6}} - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 4}{3} =$$

$$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 4}{3} =$$

$$= \ln 2 - \ln 15 = \ln \frac{2}{15}\,.$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln \dfrac{2}{15}$.

## Zadanie 6 (wersja 4)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x+73} - \frac{1}{3x+29} - \frac{1}{6x-5}\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie $w$ jest liczbą wymierną dodatnią zapisaną w postaci ułamka nieskracalnego.

*Rozwiązanie:*

Obliczamy daną w zadaniu całkę

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x+73} - \frac{1}{3x+29} - \frac{1}{6x-5}\,dx = \left(\frac{\ln(2x+73)}{2} - \frac{\ln(3x+29)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\Bigg|_{x=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(2x+73)}{2} - \frac{\ln(3x+29)}{3} - \frac{\ln(6x-5)}{6}\right)\right) - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 32}{3} + \frac{\ln 1}{6} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \ln \frac{\sqrt{2x+73}}{\sqrt[3]{3x+29}\cdot\sqrt[6]{6x-5}}\right) - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty} \sqrt[6]{\frac{(2x+73)^3}{(3x+29)^2\cdot(6x-5)}}\right) - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2\cdot 6}} - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 75}{2} + \frac{\ln 32}{3} =$$

$$= \ln 4 - \ln 15 = \ln\frac{4}{15}\,.$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln\frac{4}{15}$.

## Zadanie 7 (wersja 0)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/4} \cos 3x \cdot \cos 4x \cdot \cos 7x \, dx .$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$w \cdot \pi - v ,$$

gdzie $w$ i $v$ są liczbami wymiernymi dodatnimi zapisanymi w postaci ułamków nieskracalnych.

*Rozwiązanie:*

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2} .$$

Zatem

$$\cos 3x \cdot \cos 4x \cdot \cos 7x = \frac{z^3 + z^{-3}}{2} \cdot \frac{z^4 + z^{-4}}{2} \cdot \frac{z^7 + z^{-7}}{2} =$$

$$= \frac{z^{14} + z^8 + z^6 + 2 + z^{-6} + z^{-8} + z^{-14}}{8} = \frac{\cos 14x}{4} + \frac{\cos 8x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} + \frac{1}{4} .$$

Wobec tego

$$\int_0^{\pi/4} \cos 3x \cdot \cos 4x \cdot \cos 7x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 14x}{4} + \frac{\cos 8x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} + \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 14x}{4} + \frac{\cos 8x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} \, dx + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin 14x}{14} + \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 6x}{6} \right) \Bigg|_{x=0}^{\pi/4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin(7\pi/2)}{14} + \frac{\sin(2\pi)}{8} + \frac{\sin(3\pi/2)}{6} \right) + \frac{\pi}{16} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{-1}{14} + \frac{0}{8} + \frac{-1}{6} \right) + \frac{\pi}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{21} = \frac{\pi}{16} - \frac{5}{84} .$$

**Odpowiedź:** Podana całka ma wartość $\frac{\pi}{16} - \frac{5}{84}$

## Zadanie 7 (wersja 1)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/4} \cos 3x \cdot \cos 5x \cdot \cos 8x \, dx \,.$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$w \cdot \pi - v \,,$$

gdzie $w$ i $v$ są liczbami wymiernymi dodatnimi zapisanymi w postaci ułamków nieskracalnych.

*Rozwiązanie:*

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \,.$$

Zatem

$$\cos 3x \cdot \cos 5x \cdot \cos 8x = \frac{z^3 + z^{-3}}{2} \cdot \frac{z^5 + z^{-5}}{2} \cdot \frac{z^8 + z^{-8}}{2} =$$

$$= \frac{z^{16} + z^{10} + z^6 + 2 + z^{-6} + z^{-10} + z^{-16}}{8} = \frac{\cos 16x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} + \frac{1}{4} \,.$$

Wobec tego

$$\int_0^{\pi/4} \cos 3x \cdot \cos 5x \cdot \cos 8x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 16x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} + \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 16x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{\cos 6x}{4} \, dx + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin 16x}{16} + \frac{\sin 10x}{10} + \frac{\sin 6x}{6} \right) \Bigg|_{x=0}^{\pi/4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin(4\pi)}{16} + \frac{\sin(5\pi/2)}{10} + \frac{\sin(3\pi/2)}{6} \right) + \frac{\pi}{16} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{0}{16} + \frac{1}{10} + \frac{-1}{6} \right) + \frac{\pi}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{15} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{60} \,.$$

**Odpowiedź:** Podana całka ma wartość $\frac{\pi}{16} - \frac{1}{60}$

## Zadanie 7 (wersja 2)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{0}^{\pi/4} \cos 4x \cdot \cos 5x \cdot \cos 9x \, dx \, .$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$w \cdot \pi + v \, ,$$

gdzie $w$ i $v$ są liczbami wymiernymi dodatnimi zapisanymi w postaci ułamków nieskracalnych.

*Rozwiązanie:*

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \, .$$

Zatem

$$\cos 4x \cdot \cos 5x \cdot \cos 9x = \frac{z^4 + z^{-4}}{2} \cdot \frac{z^5 + z^{-5}}{2} \cdot \frac{z^9 + z^{-9}}{2} =$$

$$= \frac{z^{18} + z^{10} + z^8 + 2 + z^{-8} + z^{-10} + z^{-18}}{8} = \frac{\cos 18x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{\cos 8x}{4} + \frac{1}{4} \, .$$

Wobec tego

$$\int_{0}^{\pi/4} \cos 4x \cdot \cos 5x \cdot \cos 9x \, dx = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\cos 18x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{\cos 8x}{4} + \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi/4} \frac{\cos 18x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{\cos 8x}{4} \, dx + \int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin 18x}{18} + \frac{\sin 10x}{10} + \frac{\sin 8x}{8} \right) \Bigg|_{x=0}^{\pi/4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin(9\pi/2)}{18} + \frac{\sin(5\pi/2)}{10} + \frac{\sin(2\pi)}{8} \right) + \frac{\pi}{16} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{10} + \frac{0}{8} \right) + \frac{\pi}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{45} = \frac{\pi}{16} + \frac{7}{180} \, .$$

**Odpowiedź:** Podana całka ma wartość $\frac{\pi}{16} + \frac{7}{180}$

## Zadanie 7 (wersja 3)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/4} \cos 5x \cdot \cos 6x \cdot \cos 11x \, dx \, .$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$w \cdot \pi + v \, ,$$

gdzie $w$ i $v$ są liczbami wymiernymi dodatnimi zapisanymi w postaci ułamków nieskracalnych.

*Rozwiązanie:*

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$. Wówczas

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \, .$$

Zatem

$$\cos 5x \cdot \cos 6x \cdot \cos 11x = \frac{z^5 + z^{-5}}{2} \cdot \frac{z^6 + z^{-6}}{2} \cdot \frac{z^{11} + z^{-11}}{2} =$$

$$= \frac{z^{22} + z^{12} + z^{10} + 2 + z^{-10} + z^{-12} + z^{-22}}{8} = \frac{\cos 22x}{4} + \frac{\cos 12x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{1}{4} \, .$$

Wobec tego

$$\int_0^{\pi/4} \cos 5x \cdot \cos 6x \cdot \cos 11x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 22x}{4} + \frac{\cos 12x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} + \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 22x}{4} + \frac{\cos 12x}{4} + \frac{\cos 10x}{4} \, dx + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin 22x}{22} + \frac{\sin 12x}{12} + \frac{\sin 10x}{10} \right) \Bigg|_{x=0}^{\pi/4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sin(11\pi/2)}{22} + \frac{\sin(3\pi)}{12} + \frac{\sin(5\pi/2)}{10} \right) + \frac{\pi}{16} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{-1}{22} + \frac{0}{12} + \frac{1}{10} \right) + \frac{\pi}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{55} = \frac{\pi}{16} + \frac{3}{220} \, .$$

**Odpowiedź:** Podana całka ma wartość $\frac{\pi}{16} + \frac{3}{220}$