Kolokwium 4, 18.05.2021, godz. 12:20-13:00

Zadanie 4 (wersja 0)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_2^\infty \frac{13x+3}{x^3-x}\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$m\cdot\ln p+n\cdot\ln q\,,$$

gdzie p i q są liczbami pierwszymi, a liczby m i n są całkowite.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3-x=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{13x+3}{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}\,,$$

$$13x+3=A\cdot x\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)\cdot(x+1)+C\cdot(x-1)\cdot x\,.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -1 otrzymując odpowiednio

dla $x=1$ $\quad 16=2A$, skąd $A=8$,

dla $x=0$ $\quad 3=-B$, skąd $B=-3$,

dla $x=-1$ $\quad -10=2C$, skąd $C=-5$.

Wobec tego

$$\int_2^\infty \frac{13x+3}{x^3-x}\,dx=\int_2^\infty \frac{8}{x-1}-\frac{3}{x}-\frac{5}{x+1}\,dx=8\cdot\ln|x-1|-3\cdot\ln|x|+5\cdot\ln|x+1|\Big|_{x=2}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}(8\cdot\ln|x-1|-3\cdot\ln|x|-5\cdot\ln|x+1|)\right)-8\cdot\ln 1+3\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{(x-1)^8}{x^3\cdot(x+1)^5}\right)+3\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^8}{x^3\cdot(x+1)^5}\right)+3\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^8}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}\right)+3\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=$$

$$=\ln 1+3\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=3\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $3\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3$.

Zadanie 4 (wersja 1)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_2^\infty \frac{17x+5}{x^3-x}\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$m\cdot\ln p+n\cdot\ln q\,,$$

gdzie p i q są liczbami pierwszymi, a liczby m i n są całkowite.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3-x=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{17x+5}{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}\,,$$

$$17x+5=A\cdot x\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)\cdot(x+1)+C\cdot(x-1)\cdot x\,.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -1 otrzymując odpowiednio

dla $x=1$ $\qquad 22=2A,\qquad$ skąd $\qquad A=11,$

dla $x=0$ $\qquad 5=-B,\qquad$ skąd $\qquad B=-5,$

dla $x=-1$ $\qquad -12=2C,\qquad$ skąd $\qquad C=-6.$

Wobec tego

$$\int_2^\infty \frac{17x+5}{x^3-x}\,dx=\int_2^\infty \frac{11}{x-1}-\frac{5}{x}-\frac{6}{x+1}\,dx=11\cdot\ln|x-1|-5\cdot\ln|x|+6\cdot\ln|x+1|\Bigg|_{x=2}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}(11\cdot\ln|x-1|-5\cdot\ln|x|-6\cdot\ln|x+1|)\right)-11\cdot\ln 1+5\cdot\ln 2+6\cdot\ln 3=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{(x-1)^{11}}{x^5\cdot(x+1)^6}\right)+5\cdot\ln 2+6\cdot\ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^{11}}{x^5\cdot(x+1)^6}\right)+5\cdot\ln 2+6\cdot\ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{11}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{6}}\right)+5\cdot\ln 2+6\cdot\ln 3=$$

$$=\ln 1+5\cdot\ln 2+6\cdot\ln 3=5\cdot\ln 2+6\cdot\ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $5\cdot\ln 2+6\cdot\ln 3$.

Zadanie 4 (wersja 2)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_2^\infty \frac{19x+5}{x^3-x}\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$m\cdot\ln p+n\cdot\ln q\,,$$

gdzie p i q są liczbami pierwszymi, a liczby m i n są całkowite.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3-x=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{19x+5}{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}\,,$$

$$19x+5=A\cdot x\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)\cdot(x+1)+C\cdot(x-1)\cdot x\,.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -1 otrzymując odpowiednio

dla $x=1$ $\qquad 24=2A,\qquad$ skąd $\qquad A=12,$

dla $x=0$ $\qquad 5=-B,\qquad$ skąd $\qquad B=-5,$

dla $x=-1$ $\qquad -14=2C,\qquad$ skąd $\qquad C=-7.$

Wobec tego

$$\int_2^\infty \frac{19x+5}{x^3-x}\,dx=\int_2^\infty \frac{12}{x-1}-\frac{5}{x}-\frac{7}{x+1}\,dx=12\cdot\ln|x-1|-5\cdot\ln|x|+7\cdot\ln|x+1|\Bigg|_{x=2}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}(12\cdot\ln|x-1|-5\cdot\ln|x|-7\cdot\ln|x+1|)\right)-12\cdot\ln 1+5\cdot\ln 2+7\cdot\ln 3=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{(x-1)^{12}}{x^5\cdot(x+1)^7}\right)+5\cdot\ln 2+7\cdot\ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^{12}}{x^5\cdot(x+1)^7}\right)+5\cdot\ln 2+7\cdot\ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{12}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7}}\right)+5\cdot\ln 2+7\cdot\ln 3=$$

$$=\ln 1+5\cdot\ln 2+7\cdot\ln 3=5\cdot\ln 2+7\cdot\ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $5\cdot\ln 2+7\cdot\ln 3$.

Zadanie 4 (wersja 3)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{17x+7}{x^3-x}\, dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$m\cdot \ln p + n\cdot \ln q\,,$$

gdzie p i q są liczbami pierwszymi, a liczby m i n są całkowite.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3-x=(x-1)\cdot x\cdot (x+1)\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{17x+7}{(x-1)\cdot x\cdot (x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}\,,$$

$$17x+7=A\cdot x\cdot (x+1)+B\cdot (x-1)\cdot (x+1)+C\cdot (x-1)\cdot x\,.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -1 otrzymując odpowiednio

dla $x=1$ $\quad 24=2A,\quad$ skąd $\quad A=12,$

dla $x=0$ $\quad 7=-B,\quad$ skąd $\quad B=-7,$

dla $x=-1$ $\quad -10=2C,\quad$ skąd $\quad C=-5.$

Wobec tego

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{17x+7}{x^3-x}\, dx=\int\limits_{2}^{\infty} \frac{12}{x-1}-\frac{7}{x}-\frac{5}{x+1}\, dx=12\cdot \ln|x-1|-7\cdot \ln|x|+5\cdot \ln|x+1|\Bigg|_{x=2}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(12\cdot \ln|x-1|-7\cdot \ln|x|-5\cdot \ln|x+1|\right)\right)-12\cdot \ln 1+7\cdot \ln 2+5\cdot \ln 3=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\ln \frac{(x-1)^{12}}{x^7\cdot (x+1)^5}\right)+7\cdot \ln 2+5\cdot \ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^{12}}{x^7\cdot (x+1)^5}\right)+7\cdot \ln 2+5\cdot \ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{12}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}}\right)+7\cdot \ln 2+5\cdot \ln 3=$$

$$=\ln 1+7\cdot \ln 2+5\cdot \ln 3=7\cdot \ln 2+5\cdot \ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $7\cdot \ln 2+5\cdot \ln 3$.

Zadanie 4 (wersja 4)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_2^\infty \frac{19x+9}{x^3-x}\,dx\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci

$$m\cdot\ln p+n\cdot\ln q\,,$$

gdzie p i q są liczbami pierwszymi, a liczby m i n są całkowite.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3-x=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{19x+9}{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}\,,$$

$$19x+9=A\cdot x\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)\cdot(x+1)+C\cdot(x-1)\cdot x\,.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -1 otrzymując odpowiednio

dla $x=1$ $\quad 28=2A,\quad$ skąd $\quad A=14,$

dla $x=0$ $\quad 9=-B,\quad$ skąd $\quad B=-9,$

dla $x=-1$ $\quad -10=2C,\quad$ skąd $\quad C=-5.$

Wobec tego

$$\int_2^\infty \frac{19x+9}{x^3-x}\,dx=\int_2^\infty \frac{14}{x-1}-\frac{9}{x}-\frac{5}{x+1}\,dx=14\cdot\ln|x-1|-9\cdot\ln|x|+5\cdot\ln|x+1|\Big|_{x=2}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}(14\cdot\ln|x-1|-9\cdot\ln|x|-5\cdot\ln|x+1|)\right)-14\cdot\ln 1+9\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{(x-1)^{14}}{x^9\cdot(x+1)^5}\right)+9\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^{14}}{x^9\cdot(x+1)^5}\right)+9\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{14}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}}\right)+9\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=$$

$$=\ln 1+9\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3=9\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $9\cdot\ln 2+5\cdot\ln 3$.

Zadanie 5 (wersja 0)

Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5^n + \binom{4n}{n}}}{3^n}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5^n + \binom{4n}{n}}}{3^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{0 + \binom{4n}{n}}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\binom{4n}{n}}}{3^n}\,,$$

$$\frac{\sqrt{\binom{4n+4}{n+1}}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{\binom{4n}{n}}} = \frac{\sqrt{(4n+4)! \cdot (n!) \cdot (3n)!}}{3 \cdot \sqrt{(n+1)! \cdot (3n+3)! \cdot (4n)!}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)}}{3\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}} \to \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{256}{27}} = \sqrt{\frac{256}{27\cdot 9}} = \sqrt{\frac{256}{243}} > 1\,,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\binom{4n}{n}}}{3^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5^n + \binom{4n}{n}}}{3^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

Zadanie 5 (wersja 1)

Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6^n+\binom{4n}{n}}}{3^n}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6^n+\binom{4n}{n}}}{3^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{0+\binom{4n}{n}}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\binom{4n}{n}}}{3^n}\,,$$

$$\frac{\sqrt{\binom{4n+4}{n+1}}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{\binom{4n}{n}}} = \frac{\sqrt{(4n+4)!\cdot(n!)\cdot(3n)!}}{3\cdot\sqrt{(n+1)!\cdot(3n+3)!\cdot(4n)!}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)}}{3\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}} \to \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{256}{27}} = \sqrt{\frac{256}{27\cdot 9}} = \sqrt{\frac{256}{243}} > 1\,,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\binom{4n}{n}}}{3^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6^n+\binom{4n}{n}}}{3^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

Zadanie 5 (wersja 2)

Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{4n}{n}}}{3^n}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{4n}{n}}}{3^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{0 + \binom{4n}{n}}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\binom{4n}{n}}}{3^n},$$

$$\frac{\sqrt{\binom{4n+4}{n+1}}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{\binom{4n}{n}}} = \frac{\sqrt{(4n+4)! \cdot (n!) \cdot (3n)!}}{3 \cdot \sqrt{(n+1)! \cdot (3n+3)! \cdot (4n)!}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}}{3 \cdot \sqrt{(n+1) \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}} \to \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{256}{27}} = \sqrt{\frac{256}{27 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{256}{243}} > 1,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\binom{4n}{n}}}{3^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{4n}{n}}}{3^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

Zadanie 5 (wersja 3)

Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5^n+\binom{4n}{n}}}{2^n}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5^n+\binom{4n}{n}}}{2^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{0+\binom{4n}{n}}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}}{2^n}\,,$$

$$\frac{\sqrt[3]{\binom{4n+4}{n+1}}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}} = \frac{\sqrt[3]{(4n+4)!\cdot(n!)\cdot(3n)!}}{2\cdot\sqrt[3]{(n+1)!\cdot(3n+3)!\cdot(4n)!}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)}}{2\cdot\sqrt[3]{(n+1)\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}} \to \frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{256}{27}} = \sqrt[3]{\frac{256}{27\cdot 8}} = \sqrt[3]{\frac{32}{27}} > 1\,,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}}{2^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5^n+\binom{4n}{n}}}{2^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

Zadanie 5 (wersja 4)

Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{6^n + \binom{4n}{n}}}{2^n}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{6^n + \binom{4n}{n}}}{2^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{0 + \binom{4n}{n}}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}}{2^n} \,,$$

$$\frac{\sqrt[3]{\binom{4n+4}{n+1}}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}} = \frac{\sqrt[3]{(4n+4)! \cdot (n!) \cdot (3n)!}}{2 \cdot \sqrt[3]{(n+1)! \cdot (3n+3)! \cdot (4n)!}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}}{2 \cdot \sqrt[3]{(n+1) \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}} \to \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{256}{27}} = \sqrt[3]{\frac{256}{27 \cdot 8}} = \sqrt[3]{\frac{32}{27}} > 1 \,,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}}{2^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{6^n + \binom{4n}{n}}}{2^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

Zadanie 5 (wersja 5)

Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{7^n + \binom{4n}{n}}}{2^n}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{7^n + \binom{4n}{n}}}{2^n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{0 + \binom{4n}{n}}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}}{2^n}\,,$$

$$\frac{\sqrt[3]{\binom{4n+4}{n+1}}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}} = \frac{\sqrt[3]{(4n+4)! \cdot (n!) \cdot (3n)!}}{2 \cdot \sqrt[3]{(n+1)! \cdot (3n+3)! \cdot (4n)!}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}}{2 \cdot \sqrt[3]{(n+1) \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}} \to \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{256}{27}} = \sqrt[3]{\frac{256}{27 \cdot 8}} = \sqrt[3]{\frac{32}{27}} > 1\,,$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\binom{4n}{n}}}{2^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{7^n + \binom{4n}{n}}}{2^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.