**Kolokwium 3, 13.04.2021, godz. 12:20-12:40**

# Zadanie 3 (wersja 0)

Obliczyć długość krzywej (fragment paraboli):

$$\left\{\left(x,x^2\right):\ x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]\right\}.$$

**Wskazówka:** Niewymierność $\sqrt{c^2\cdot x^2+1}$ całkujemy wykonując podstawienie

$$t=\sqrt{c^2\cdot x^2+1}+c\cdot x\,.$$

Aby w miarę łatwo wyznaczyć zależność $x$ od $t$ należy uprościć wyrażenie $t-\frac{1}{t}$, natomiast uproszczenie wyrażenia $t+\frac{1}{t}$ pozwoli wyrazić pierwiastek w zależności od $t$.

*Rozwiązanie:*

Zgodnie ze znanym z wykładu wzorem, długość krzywej

$$\{(x,f(x)):\ x\in[a,b]\}$$

jest równa

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

W naszym przypadku

$$f(x)=x^2,\qquad a=0,\qquad b=\frac{2}{3}\,.$$

Ponieważ $f'(x)=2\cdot x$, szukana długość krzywej jest równa

$$\int_0^{2/3}\sqrt{1+(2\cdot x)^2}\,dx=\int_0^{2/3}\sqrt{1+4\cdot x^2}\,dx\,.$$

Zgodnie ze wskazówką wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x$$

i upraszczamy stosując wzór na różnicę kwadratów

$$t-\frac{1}{t}=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x-\frac{1}{\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x}=$$
$$=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x-\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\cdot x\right)=4\cdot x\,,$$

skąd

$$x=\frac{1}{4}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

i formalnie

$$dx=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\,.$$

Analogicznie

$$t+\frac{1}{t}=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x+\frac{1}{\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x}=$$
$$=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x+\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\cdot x\right)=2\cdot\sqrt{4\cdot x^2+1}\,,$$

skąd

$$\sqrt{4\cdot x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

Ponieważ $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=2/3$ odpowiada $t=3$, możemy obliczyć wartość całki:

$$\int_0^{2/3}\sqrt{1+4\cdot x^2}\,dx=\frac{1}{8}\cdot\int_1^3\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{8}\cdot\int_1^3 t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\,dt=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+2\cdot\ln t-\frac{1}{2\cdot t^2}\right)\Bigg|_{t=1}^{3}=\frac{\ln 3}{4}+\frac{5}{9}\,.$$

## Zadanie 3 (wersja 1)

Obliczyć długość krzywej (fragment paraboli):

$$\left\{\left(x,x^2\right):\ x\in\left[0,\frac{3}{8}\right]\right\}.$$

**Wskazówka:** Niewymierność $\sqrt{c^2\cdot x^2+1}$ całkujemy wykonując podstawienie

$$t=\sqrt{c^2\cdot x^2+1}+c\cdot x\,.$$

Aby w miarę łatwo wyznaczyć zależność $x$ od $t$ należy uprościć wyrażenie $t-\frac{1}{t}$, natomiast uproszczenie wyrażenia $t+\frac{1}{t}$ pozwoli wyrazić pierwiastek w zależności od $t$.

*Rozwiązanie:*

Zgodnie ze znanym z wykładu wzorem, długość krzywej

$$\{(x,f(x)):\ x\in[a,b]\}$$

jest równa

$$\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

W naszym przypadku

$$f(x)=x^2,\qquad a=0,\qquad b=\frac{3}{8}\,.$$

Ponieważ $f'(x)=2\cdot x$, szukana długość krzywej jest równa

$$\int_0^{3/8}\sqrt{1+\left(2\cdot x\right)^2}\,dx=\int_0^{3/8}\sqrt{1+4\cdot x^2}\,dx\,.$$

Zgodnie ze wskazówką wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x$$

i upraszczamy stosując wzór na różnicę kwadratów

$$t-\frac{1}{t}=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x-\frac{1}{\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x}=$$

$$=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x-\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\cdot x\right)=4\cdot x\,,$$

skąd

$$x=\frac{1}{4}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

i formalnie

$$dx=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\,.$$

Analogicznie

$$t+\frac{1}{t}=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x+\frac{1}{\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x}=$$

$$=\sqrt{4\cdot x^2+1}+2\cdot x+\left(\sqrt{4\cdot x^2+1}-2\cdot x\right)=2\cdot\sqrt{4\cdot x^2+1}\,,$$

skąd

$$\sqrt{4\cdot x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

Ponieważ $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3/8$ odpowiada $t=2$, możemy obliczyć wartość całki:

$$\int_0^{3/8}\sqrt{1+4\cdot x^2}\,dx=\frac{1}{8}\cdot\int_1^2\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{8}\cdot\int_1^2 t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\,dt=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+2\cdot\ln t-\frac{1}{2\cdot t^2}\right)\Bigg|_{t=1}^{2}=\frac{\ln 2}{4}+\frac{15}{64}\,.$$

## Zadanie 3 (wersja 2)

Obliczyć długość krzywej (fragment paraboli):

$$\left\{\left(x,\, 2\cdot x^2\right):\ x\in\left[0,\, \frac{1}{3}\right]\right\}.$$

**Wskazówka:** Niewymierność $\sqrt{c^2\cdot x^2+1}$ całkujemy wykonując podstawienie

$$t=\sqrt{c^2\cdot x^2+1}+c\cdot x\,.$$

Aby w miarę łatwo wyznaczyć zależność $x$ od $t$ należy uprościć wyrażenie $t-\frac{1}{t}$, natomiast uproszczenie wyrażenia $t+\frac{1}{t}$ pozwoli wyrazić pierwiastek w zależności od $t$.

*Rozwiązanie:*

Zgodnie ze znanym z wykładu wzorem, długość krzywej

$$\{(x,\, f(x)):\ x\in[a,\, b]\}$$

jest równa

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx\,.$$

W naszym przypadku

$$f(x)=2\cdot x^2, \qquad a=0, \qquad b=\frac{1}{3}\,.$$

Ponieważ $f'(x)=4\cdot x$, szukana długość krzywej jest równa

$$\int_0^{1/3} \sqrt{1+(4\cdot x)^2}\, dx=\int_0^{1/3} \sqrt{1+16\cdot x^2}\, dx\,.$$

Zgodnie ze wskazówką wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x$$

i upraszczamy stosując wzór na różnicę kwadratów

$$t-\frac{1}{t}=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x-\frac{1}{\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x}=$$

$$=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x-\left(\sqrt{16\cdot x^2+1}-4\cdot x\right)=8\cdot x\,,$$

skąd

$$x=\frac{1}{8}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

i formalnie

$$dx=\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\,.$$

Analogicznie

$$t+\frac{1}{t}=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x+\frac{1}{\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x}=$$

$$=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x+\left(\sqrt{16\cdot x^2+1}-4\cdot x\right)=2\cdot\sqrt{16\cdot x^2+1}\,,$$

skąd

$$\sqrt{16\cdot x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

Ponieważ $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=1/3$ odpowiada $t=3$, możemy obliczyć wartość całki:

$$\int_0^{1/3}\sqrt{1+16\cdot x^2}\,dx=\frac{1}{16}\cdot\int_1^3\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{16}\cdot\int_1^3 t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\,dt=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+2\cdot\ln t-\frac{1}{2\cdot t^2}\right)\Bigg|_{t=1}^{3}=\frac{\ln 3}{8}+\frac{5}{18}\,.$$

## Zadanie 3 (wersja 3)

Obliczyć długość krzywej (fragment paraboli):

$$\left\{\left(x,2\cdot x^2\right):\ x\in\left[0,\frac{3}{16}\right]\right\}.$$

**Wskazówka:** Niewymierność $\sqrt{c^2\cdot x^2+1}$ całkujemy wykonując podstawienie

$$t=\sqrt{c^2\cdot x^2+1}+c\cdot x\,.$$

Aby w miarę łatwo wyznaczyć zależność $x$ od $t$ należy uprościć wyrażenie $t-\frac{1}{t}$, natomiast uproszczenie wyrażenia $t+\frac{1}{t}$ pozwoli wyrazić pierwiastek w zależności od $t$.

*Rozwiązanie:*

Zgodnie ze znanym z wykładu wzorem, długość krzywej

$$\{(x,f(x)):\ x\in[a,b]\}$$

jest równa

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

W naszym przypadku

$$f(x)=2\cdot x^2,\qquad a=0,\qquad b=\frac{3}{16}\,.$$

Ponieważ $f'(x)=4\cdot x$, szukana długość krzywej jest równa

$$\int_0^{3/16}\sqrt{1+(4\cdot x)^2}\,dx=\int_0^{3/16}\sqrt{1+16\cdot x^2}\,dx\,.$$

Zgodnie ze wskazówką wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x$$

i upraszczamy stosując wzór na różnicę kwadratów

$$t-\frac{1}{t}=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x-\frac{1}{\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x}=$$
$$=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x-\left(\sqrt{16\cdot x^2+1}-4\cdot x\right)=8\cdot x\,,$$

skąd

$$x=\frac{1}{8}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

i formalnie

$$dx=\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\,.$$

Analogicznie

$$t+\frac{1}{t}=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x+\frac{1}{\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x}=$$
$$=\sqrt{16\cdot x^2+1}+4\cdot x+\left(\sqrt{16\cdot x^2+1}-4\cdot x\right)=2\cdot\sqrt{16\cdot x^2+1}\,,$$

skąd
$$\sqrt{16\cdot x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)$$
Ponieważ $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3/16$ odpowiada $t=2$, możemy obliczyć wartość całki:
$$\int_0^{3/16}\sqrt{1+16\cdot x^2}\,dx=\frac{1}{16}\cdot\int_1^2\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{16}\cdot\int_1^2 t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\,dt=$$
$$=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+2\cdot\ln t-\frac{1}{2\cdot t^2}\right)\Bigg|_{t=1}^{2}=\frac{\ln 2}{8}+\frac{15}{128}\,.$$