

Kolokwium 2, **16.03.2021**, godz. 12:00-12:20**Zadanie 2** (wersja 0)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+5)}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+5},$$
$$1 = A \cdot (x+1) \cdot (x+5) + B \cdot x \cdot (x+5) + D \cdot x \cdot (x+1). \quad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wyznaczaniem wielomianu po prawej stronie równania (\*), układaniem układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (\*) kolejno  $x = 0, -1, -5$ . Otrzymujemy:

dla  $x = 0$   $1 = 5 \cdot A$ , skąd  $A = 1/5$ ,

dla  $x = -1$   $1 = -4 \cdot B$ , skąd  $B = -1/4$ ,

dla  $x = -5$   $1 = 20 \cdot D$ , skąd  $D = 1/20$ ,

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+5)} = \int \frac{1/5}{x} - \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/20}{x+5} dx = \frac{\ln|x|}{5} - \frac{\ln|x+1|}{4} + \frac{\ln|x+5|}{20} + C.$$

**Zadanie 2 (wersja 1)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+6)}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+6},$$
$$1 = A \cdot (x+1) \cdot (x+6) + B \cdot x \cdot (x+6) + D \cdot x \cdot (x+1). \quad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (\*), układaniem układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (\*) kolejno  $x = 0, -1, -6$ . Otrzymujemy:

dla  $x = 0$   $1 = 6 \cdot A$ , skąd  $A = 1/6$ ,

dla  $x = -1$   $1 = -5 \cdot B$ , skąd  $B = -1/5$ ,

dla  $x = -6$   $1 = 30 \cdot D$ , skąd  $D = 1/30$ ,

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+6)} = \int \frac{1/6}{x} - \frac{1/5}{x+1} + \frac{1/30}{x+6} dx = \frac{\ln|x|}{6} - \frac{\ln|x+1|}{5} + \frac{\ln|x+6|}{30} + C.$$

**Zadanie 2 (wersja 2)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+7)}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+7)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+7},$$
$$1 = A \cdot (x+1) \cdot (x+7) + B \cdot x \cdot (x+7) + D \cdot x \cdot (x+1). \quad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (\*), układaniem układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (\*) kolejno  $x = 0, -1, -7$ . Otrzymujemy:

dla  $x = 0$   $1 = 7 \cdot A$ , skąd  $A = 1/7$ ,

dla  $x = -1$   $1 = -6 \cdot B$ , skąd  $B = -1/6$ ,

dla  $x = -7$   $1 = 42 \cdot D$ , skąd  $D = 1/42$ ,

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+7)} = \int \frac{1/7}{x} - \frac{1/6}{x+1} + \frac{1/42}{x+7} dx = \frac{\ln|x|}{7} - \frac{\ln|x+1|}{6} + \frac{\ln|x+7|}{42} + C.$$

**Zadanie 2 (wersja 3)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+8)}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+8},$$
$$1 = A \cdot (x+1) \cdot (x+8) + B \cdot x \cdot (x+8) + D \cdot x \cdot (x+1). \quad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (\*), układaniem układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (\*) kolejno  $x = 0, -1, -8$ . Otrzymujemy:

dla  $x = 0$   $1 = 8 \cdot A$ , skąd  $A = 1/8$ ,

dla  $x = -1$   $1 = -7 \cdot B$ , skąd  $B = -1/7$ ,

dla  $x = -8$   $1 = 56 \cdot D$ , skąd  $D = 1/56$ ,

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+8)} = \int \frac{1/8}{x} - \frac{1/7}{x+1} + \frac{1/56}{x+8} dx = \frac{\ln|x|}{8} - \frac{\ln|x+1|}{7} + \frac{\ln|x+8|}{56} + C.$$

**Zadanie 2 (wersja 4)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+9)}.$$

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{1}{x \cdot (x+1) \cdot (x+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+9},$$
$$1 = A \cdot (x+1) \cdot (x+9) + B \cdot x \cdot (x+9) + D \cdot x \cdot (x+1). \quad (*)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (\*), układaniem układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (\*) kolejno  $x = 0, -1, -9$ . Otrzymujemy:

dla  $x = 0$   $1 = 9 \cdot A$ , skąd  $A = 1/9$ ,

dla  $x = -1$   $1 = -8 \cdot B$ , skąd  $B = -1/8$ ,

dla  $x = -9$   $1 = 72 \cdot D$ , skąd  $D = 1/72$ ,

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{dx}{x \cdot (x+1) \cdot (x+9)} = \int \frac{1/9}{x} - \frac{1/8}{x+1} + \frac{1/72}{x+9} dx = \frac{\ln|x|}{9} - \frac{\ln|x+1|}{8} + \frac{\ln|x+9|}{72} + C.$$