Kolokwium 1, 9.03.2021, godz. 12:00-12:20

Zadanie 1 (wersja 0)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[11]{x^2}}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykonując podstawienie $x=t^{11}$ i formalnie $dx=11t^{10}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^9+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[11]{x^2}}=11\cdot\int\frac{t^{10}\,dt}{t^{11}+t^2}=11\cdot\int\frac{t^8\,dt}{t^9+1}=\frac{11}{9}\cdot\int\frac{9t^8\,dt}{t^9+1}=\frac{11}{9}\cdot\ln\left|t^9+1\right|+C=$$
$$=\frac{11}{9}\cdot\ln\left|x^{9/11}+1\right|+C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $t=\sqrt[11]{x^2}$, czyli $x=t^{11/2}$ i formalnie $dx=\frac{11}{2}t^{9/2}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{9/2}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[11]{x^2}}=\frac{11}{2}\cdot\int\frac{t^{9/2}\,dt}{t^{11/2}+t}=\frac{11}{2}\cdot\int\frac{t^{7/2}\,dt}{t^{9/2}+1}=\frac{11}{9}\cdot\int\frac{\frac{9}{2}t^{7/2}\,dt}{t^{9/2}+1}=\frac{11}{9}\cdot\ln\left|t^{9/2}+1\right|+C=$$
$$=\frac{11}{9}\cdot\ln\left|x^{9/11}+1\right|+C\,.$$

Sposób III

Wykonując podstawienie $x=t^{11/9}$ i formalnie $dx=\frac{11t^{2/9}\,dt}{9}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[11]{x^2}}=\frac{11}{9}\cdot\int\frac{t^{2/9}\,dt}{t^{11/9}+t^{2/9}}=\frac{11}{9}\cdot\int\frac{dt}{t+1}=\frac{11}{9}\cdot\ln|t+1|+C=$$
$$=\frac{11}{9}\cdot\ln\left|x^{9/11}+1\right|+C\,.$$

Sposób IV

Korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ dla $f(x)=x^{9/11}+1$ otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[11]{x^2}}=\int\frac{x^{-2/11}dx}{x^{9/11}+1}=\frac{11}{9}\cdot\int\frac{\frac{9}{11}x^{-2/11}dx}{x^{9/11}+1}=\frac{11}{9}\cdot\ln\left|x^{9/11}+1\right|+C\,.$$

Zadanie 1 (wersja 1)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[13]{x^2}}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykonując podstawienie $x=t^{13}$ i formalnie $dx=13t^{12}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{11}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[13]{x^2}}=13\cdot\int \frac{t^{12}\,dt}{t^{13}+t^2}=13\cdot\int \frac{t^{10}\,dt}{t^{11}+1}=\frac{13}{11}\cdot\int \frac{11t^{10}\,dt}{t^{11}+1}=\frac{13}{11}\cdot\ln\left|t^{11}+1\right|+C=$$
$$=\frac{13}{11}\cdot\ln\left|x^{11/13}+1\right|+C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $t=\sqrt[13]{x^2}$, czyli $x=t^{13/2}$ i formalnie $dx=\frac{13}{2}t^{11/2}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{11/2}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[13]{x^2}}=\frac{13}{2}\cdot\int \frac{t^{11/2}\,dt}{t^{13/2}+t}=\frac{13}{2}\cdot\int \frac{t^{9/2}\,dt}{t^{11/2}+1}=\frac{13}{11}\cdot\int \frac{\frac{11}{2}t^{9/2}\,dt}{t^{11/2}+1}=\frac{13}{11}\cdot\ln\left|t^{11/2}+1\right|+C=$$
$$=\frac{13}{11}\cdot\ln\left|x^{11/13}+1\right|+C\,.$$

Sposób III

Wykonując podstawienie $x=t^{13/11}$ i formalnie $dx=\frac{13t^{2/11}\,dt}{11}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[13]{x^2}}=\frac{13}{11}\cdot\int \frac{t^{2/11}\,dt}{t^{13/11}+t^{2/11}}=\frac{13}{11}\cdot\int \frac{dt}{t+1}=\frac{13}{11}\cdot\ln|t+1|+C=$$
$$=\frac{13}{11}\cdot\ln\left|x^{11/13}+1\right|+C\,.$$

Sposób IV

Korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ dla $f(x)=x^{11/13}+1$ otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[13]{x^2}}=\int \frac{x^{-2/13}dx}{x^{11/13}+1}=\frac{13}{11}\cdot\int \frac{\frac{11}{13}x^{-2/13}dx}{x^{11/13}+1}=\frac{13}{11}\cdot\ln\left|x^{11/13}+1\right|+C\,.$$

Zadanie 1 (wersja 2)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[17]{x^2}}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykonując podstawienie $x=t^{17}$ i formalnie $dx=17t^{16}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{15}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[17]{x^2}}=17\cdot\int \frac{t^{16}\,dt}{t^{17}+t^2}=17\cdot\int \frac{t^{14}\,dt}{t^{15}+1}=\frac{17}{15}\cdot\int \frac{15t^{14}\,dt}{t^{15}+1}=\frac{17}{15}\cdot\ln\left|t^{15}+1\right|+C=$$
$$=\frac{17}{15}\cdot\ln\left|x^{15/17}+1\right|+C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $t=\sqrt[17]{x^2}$, czyli $x=t^{17/2}$ i formalnie $dx=\frac{17}{2}t^{15/2}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{15/2}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[17]{x^2}}=\frac{17}{2}\cdot\int \frac{t^{15/2}\,dt}{t^{17/2}+t}=\frac{17}{2}\cdot\int \frac{t^{13/2}\,dt}{t^{15/2}+1}=\frac{17}{15}\cdot\int \frac{\frac{15}{2}t^{13/2}\,dt}{t^{15/2}+1}=\frac{17}{15}\cdot\ln\left|t^{15/2}+1\right|+C=$$
$$=\frac{17}{15}\cdot\ln\left|x^{15/17}+1\right|+C\,.$$

Sposób III

Wykonując podstawienie $x=t^{17/15}$ i formalnie $dx=\frac{17t^{2/15}\,dt}{15}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[17]{x^2}}=\frac{17}{15}\cdot\int \frac{t^{2/15}\,dt}{t^{17/15}+t^{2/15}}=\frac{17}{15}\cdot\int \frac{dt}{t+1}=\frac{17}{15}\cdot\ln|t+1|+C=$$
$$=\frac{17}{15}\cdot\ln\left|x^{15/17}+1\right|+C\,.$$

Sposób IV

Korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ dla $f(x)=x^{15/17}+1$ otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[17]{x^2}}=\int \frac{x^{-2/17}dx}{x^{15/17}+1}=\frac{17}{15}\cdot\int \frac{\frac{15}{17}x^{-2/17}dx}{x^{15/17}+1}=\frac{17}{15}\cdot\ln\left|x^{15/17}+1\right|+C\,.$$

Zadanie 1 (wersja 3)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[19]{x^2}}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykonując podstawienie $x=t^{19}$ i formalnie $dx=19t^{18}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{17}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[19]{x^2}}=19\cdot\int \frac{t^{18}\,dt}{t^{19}+t^2}=19\cdot\int \frac{t^{16}\,dt}{t^{17}+1}=\frac{19}{17}\cdot\int \frac{17t^{16}\,dt}{t^{17}+1}=\frac{19}{17}\cdot\ln\left|t^{17}+1\right|+C=$$
$$=\frac{19}{17}\cdot\ln\left|x^{17/19}+1\right|+C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $t=\sqrt[19]{x^2}$, czyli $x=t^{19/2}$ i formalnie $dx=\frac{19}{2}t^{17/2}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{17/2}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[19]{x^2}}=\frac{19}{2}\cdot\int \frac{t^{17/2}\,dt}{t^{19/2}+t}=\frac{19}{2}\cdot\int \frac{t^{15/2}\,dt}{t^{17/2}+1}=\frac{19}{17}\cdot\int \frac{\frac{17}{2}t^{15/2}\,dt}{t^{17/2}+1}=\frac{19}{17}\cdot\ln\left|t^{17/2}+1\right|+C=$$
$$=\frac{19}{17}\cdot\ln\left|x^{17/19}+1\right|+C\,.$$

Sposób III

Wykonując podstawienie $x=t^{19/17}$ i formalnie $dx=\frac{19t^{2/17}\,dt}{17}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[19]{x^2}}=\frac{19}{17}\cdot\int \frac{t^{2/17}\,dt}{t^{19/17}+t^{2/17}}=\frac{19}{17}\cdot\int \frac{dt}{t+1}=\frac{19}{17}\cdot\ln|t+1|+C=$$
$$=\frac{19}{17}\cdot\ln\left|x^{17/19}+1\right|+C\,.$$

Sposób IV

Korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ dla $f(x)=x^{17/19}+1$ otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[19]{x^2}}=\int \frac{x^{-2/19}dx}{x^{17/19}+1}=\frac{19}{17}\cdot\int \frac{\frac{17}{19}x^{-2/19}dx}{x^{17/19}+1}=\frac{19}{17}\cdot\ln\left|x^{17/19}+1\right|+C\,.$$

Zadanie 1 (wersja 4)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[23]{x^2}}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykonując podstawienie $x=t^{23}$ i formalnie $dx=23t^{22}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{21}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[23]{x^2}}=23\cdot\int\frac{t^{22}\,dt}{t^{23}+t^2}=23\cdot\int\frac{t^{20}\,dt}{t^{21}+1}=\frac{23}{21}\cdot\int\frac{21t^{20}\,dt}{t^{21}+1}=\frac{23}{21}\cdot\ln\left|t^{21}+1\right|+C=$$

$$=\frac{23}{21}\cdot\ln\left|x^{21/23}+1\right|+C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $t=\sqrt[23]{x^2}$, czyli $x=t^{23/2}$ i formalnie $dx=\frac{23}{2}t^{21/2}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{21/2}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[23]{x^2}}=\frac{23}{2}\cdot\int\frac{t^{21/2}\,dt}{t^{23/2}+t}=\frac{23}{2}\cdot\int\frac{t^{19/2}\,dt}{t^{21/2}+1}=\frac{23}{21}\cdot\int\frac{\frac{21}{2}t^{19/2}\,dt}{t^{21/2}+1}=\frac{23}{21}\cdot\ln\left|t^{21/2}+1\right|+C=$$

$$=\frac{23}{21}\cdot\ln\left|x^{21/23}+1\right|+C\,.$$

Sposób III

Wykonując podstawienie $x=t^{23/21}$ i formalnie $dx=\frac{23t^{2/21}\,dt}{21}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[23]{x^2}}=\frac{23}{21}\cdot\int\frac{t^{2/21}\,dt}{t^{23/21}+t^{2/21}}=\frac{23}{21}\cdot\int\frac{dt}{t+1}=\frac{23}{21}\cdot\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{23}{21}\cdot\ln\left|x^{21/23}+1\right|+C\,.$$

Sposób IV

Korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ dla $f(x)=x^{21/23}+1$ otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[23]{x^2}}=\int\frac{x^{-2/23}dx}{x^{21/23}+1}=\frac{23}{21}\cdot\int\frac{\frac{21}{23}x^{-2/23}dx}{x^{21/23}+1}=\frac{23}{21}\cdot\ln\left|x^{21/23}+1\right|+C\,.$$

Zadanie 1 (wersja 5)

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[29]{x^2}}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykonując podstawienie $x=t^{29}$ i formalnie $dx=29t^{28}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{27}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[29]{x^2}}=29\cdot\int\frac{t^{28}\,dt}{t^{29}+t^2}=29\cdot\int\frac{t^{26}\,dt}{t^{27}+1}=\frac{29}{27}\cdot\int\frac{27t^{26}\,dt}{t^{27}+1}=\frac{29}{27}\cdot\ln\left|t^{27}+1\right|+C=$$

$$=\frac{29}{27}\cdot\ln\left|x^{27/29}+1\right|+C\,.$$

Sposób II

Wykonując podstawienie $t=\sqrt[29]{x^2}$, czyli $x=t^{29/2}$ i formalnie $dx=\frac{29}{2}t^{27/2}\,dt$, a po drodze korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|+C$ dla $f(t)=t^{27/2}+1$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[29]{x^2}}=\frac{29}{2}\cdot\int\frac{t^{27/2}\,dt}{t^{29/2}+t}=\frac{29}{2}\cdot\int\frac{t^{25/2}\,dt}{t^{27/2}+1}=\frac{29}{27}\cdot\int\frac{\frac{27}{2}t^{25/2}\,dt}{t^{27/2}+1}=\frac{29}{27}\cdot\ln\left|t^{27/2}+1\right|+C=$$

$$=\frac{29}{27}\cdot\ln\left|x^{27/29}+1\right|+C\,.$$

Sposób III

Wykonując podstawienie $x=t^{29/27}$ i formalnie $dx=\frac{29t^{2/27}\,dt}{27}$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[29]{x^2}}=\frac{29}{27}\cdot\int\frac{t^{2/27}\,dt}{t^{29/27}+t^{2/27}}=\frac{29}{27}\cdot\int\frac{dt}{t+1}=\frac{29}{27}\cdot\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{29}{27}\cdot\ln\left|x^{27/29}+1\right|+C\,.$$

Sposób IV

Korzystając ze wzoru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ dla $f(x)=x^{27/29}+1$ otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[29]{x^2}}=\int\frac{x^{-2/29}dx}{x^{27/29}+1}=\frac{29}{27}\cdot\int\frac{\frac{27}{29}x^{-2/29}dx}{x^{27/29}+1}=\frac{29}{27}\cdot\ln\left|x^{27/29}+1\right|+C\,.$$