Szacowanie $\sqrt[n]{n}$

Dziś zajmiemy się oszacowaniem wyrażenia $\sqrt[n]{n}$. Nie tylko nie widać jak to zrobić przez proste bezpośrednie szacowanie, ale nawet trudno uzasadnić, czy dla dużych n liczba ta jest duża czy mała, gdyż z jednej strony mamy pod pierwiastkiem dużą liczbę, ale liczba ta jest potraktowana pierwiastkiem wysokiego stopnia.

Aby dokonać tego oszacowania, oszacujemy nadwyżkę liczby $\sqrt[n]{n}$ ponad jedynkę. Ale i tego nie uda się zrobić bezpośrednio. Oznaczmy tę nadwyżkę przez a_n, czyli przyjmijmy

$$a_n = \sqrt[n]{n} - 1$$

lub inaczej

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n .$$

Powyższa równość zawiera pierwiastek wysokiego stopnia. Aby się go pozbyć, podnosimy ją obustronnie do n-tej potęgi otrzymując:

$$n = (1 + a_n)^n .$$

Następnie stosujemy do prawej strony wzór dwumianowy Newtona.

$$n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot a_n + \binom{n}{2} \cdot a_n^2 + \binom{n}{3} \cdot a_n^3 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a_n^n . \qquad (\clubsuit)$$

Nie zrażajmy się tym, że otrzymane równanie ma koszmarnie skomplikowaną postać, która wydaje się bezużyteczna. Trzeba wykonać bardzo odważne szacowanie, które wydaje się dość grube i zbyt trywialne, ale dla naszych celów okaże się wystarczające. Otóż skorzystamy z tego, że:

Suma co najmniej dwóch[1] składników dodatnich jest większa od każdego składnika.

Odrzućmy trywialny przypadek $n = 1$, gdzie $\sqrt[1]{1} = 1$, czyli $a_1 = 0$ i nie ma tam niczego interesującego do zbadania. Dla $n \geqslant 2$ mamy $a_n > 0$, gdyż $\sqrt[n]{n} > 1$, a więc suma po prawej stronie równości ($\clubsuit$) składa się z co najmniej trzech składników dodatnich (składników jest $n+1$). Zatem każdy jej składnik jest mniejszy od całej sumy. Zastosujmy tę uwagę kolejno do początkowych składników i zobaczmy co ciekawego otrzymamy.

Biorac pod uwagę pierwszy składnik, otrzymamy nierówność

$$n > \binom{n}{0},$$

czyli

$$n > 1 .$$

Wobec naszego założenia $n \geqslant 2$ nierówność ta jest prawdziwa, ale niczego nowego się z niej nie dowiadujemy. Trudno jednak było oczekiwać, że składnik niezawierający a_n powie nam coś interesującego.

[1]Dużo zgrabniej byłoby napisać po prostu *Suma składników dodatnich...*, ale można sobie wyobrazić, że ktoś dopuszcza zdegenerowane sumy złożone z jednego składnika.

Z kolei porównanie sumy z drugim składnikiem daje

$$n > \binom{n}{1} \cdot a_n .$$

czyli

$$n > n \cdot a_n ,$$

skąd

$$1 > a_n$$

i w konsekwencji

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n < 2 .$$

To już jest coś, bo wiemy, że liczba $\sqrt[n]{n}$ nigdy nie będzie zbyt duża — mieści się między 1 i 2. Ale może uda się uzyskać coś więcej...

Porównujemy więc sumę z trzecim składnikiem. Otrzymujemy

$$n > \binom{n}{2} \cdot a_n^2 ,$$

czyli

$$n > \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a_n^2 ,$$

co po uproszczeniu daje

$$1 > \frac{n-1}{2} \cdot a_n^2 ,$$

skąd

$$a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} .$$

Jesteśmy skłonni pogorszyć nieco to oszacowanie w celu uzyskania prostszej postaci. Konkretnie chodzi o oszacowanie przez potęgę n z jakimś współczynnikiem. Pamiętając, że $n \geqslant 2$, czyli $1 \leqslant \frac{n}{2}$, otrzymujemy

$$a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

W konsekwencji otrzymaliśmy oszacowanie

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} . \qquad (\spadesuit)$$

Oszacowanie to pokazuje, że dla dużych n liczba $\sqrt[n]{n}$ jest niewiele większa od 1.

Zobaczmy jeszcze, co otrzymalibyśmy porównując sumę po prawej stronie wzoru (♣) z czwartym składnikiem. Ponieważ czwarty składnik istnieje tylko dla $n\geqslant 3$, poczynimy takie właśnie założenie o n. Dostajemy nierówność

$$n>\binom{n}{3}\cdot a_n^3\,,$$

czyli

$$n>\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}\cdot a_n^3\,,$$

skąd wobec nierówności $1\leqslant\frac{n}{3}$ otrzymujemy

$$a_n^3<\frac{6}{(n-1)\cdot(n-2)}\leqslant\frac{6}{\left(n-\frac{n}{3}\right)\cdot\left(n-\frac{2n}{3}\right)}=\frac{6}{\frac{2n}{3}\cdot\frac{n}{3}}=\frac{27}{n^2}\,.$$

W konsekwencji

$$a_n<\frac{3}{n^{2/3}}\,.$$

To prowadzi do oszacowania

$$\sqrt[n]{n}<1+\frac{3}{n^{2/3}}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Wprawdzie oszacowanie to udowodniliśmy przy założeniu $n\geqslant 3$, ale dla $n=1$ jest ono oczywiście prawdziwe, a dla $n=2$ prawa strona jest większa od lewej, co pokazują następujące nierówności:

$$P=1+\frac{3}{2^{2/3}}>1+\frac{3}{2^1}=\frac{5}{2}>2>\sqrt{2}=L\,.$$

Dla naszych przyszłych rozważań oszacowanie (♠) będzie w zupełności wystarczające.

Oszacowanie (♡) jest nieco mocniejsze dla dużych n, bo n występuje w nim w mianowniku w wyższej potędze.

Na przykład dla $n=1\,000\,000$ oszacowania te dają odpowiednio:

$$\sqrt[1000000]{1000000}<1+\frac{2}{\sqrt{1000000}}=1+\frac{2}{1000}=1{,}002\,, \qquad (\spadesuit)$$

$$\sqrt[1000000]{1000000}<1+\frac{3}{1000000^{2/3}}=1+\frac{3}{10000}=1{,}0003\,. \qquad (\heartsuit)$$

Używając komputera można sprawdzić, że w rzeczywistości

$$\sqrt[1000000]{1000000}\approx 1{,}0000138\,.$$