Szacowanie (c.d.).

Dziś kolejne przykłady szacowania liczb i wyrażeń.

101. Wskazać taką liczbę naturalną $n>1$, że
$$n^{1000}<2^n .$$

Nierówność ta ma skonkretyzować znany fakt: Wyrażenie wykładnicze zdominuje wyrażenie wielomianowe dla odpowiednio dużej wartości argumentu. My jednak chcemy wskazać konkretną liczbę i precyzyjnie (oraz w miarę prosto) udowodnić odpowiednią nierówność.

Rozwiązanie:

Zanim wskażemy odpowiednią liczbę naturalną n i wykażemy, że spełnia ona wymaganą nierówność, zastanówmy się nad zagadnieniem o wiele prostszym, a mianowicie: Dla danej konkretnej liczby n, jakie w ogóle mamy szanse ręcznie sprawdzić, czy ta nierówność jest spełniona? Dla przypadkowej liczby n może to być uciążliwe lub wręcz praktycznie niemożliwe. Ale skoro to my mamy wybrać liczbę n, możemy założyć, że jest ona specjalnej postaci — takiej, aby było nam wygodniej przeprowadzić oszacowania.

Patrząc na prawą stronę danej nierówności, widzimy potęgę dwójki. Postarajmy się więc wybrać takie n, aby po lewej stronie też wystąpiła potęga dwójki. W tym celu przyjmijmy, że $n=2^k$. Wówczas podana nierówność przybiera postać
$$2^{1000k}<2^{2^k} ,$$
co jest równoważne nierówności
$$1000k<2^k .$$

Bez trudu stwierdzamy, że dla $k=14$ lewa strona jest równa 14000, a prawa jest większa od 16000 (do tego wystarczy wiedzieć, że $2^{10}>1000$).

Zatem dobrym przykładem liczby n jest liczba $n=2^{14}=16384$. Natomiast dla liczby $n=2^{13}=8192$ dana nierówność jest fałszywa.

Inny sposób podejścia do tej nierówności, mniej narzucający się, ale za to bardziej wydajny, jak się okazuje, to spojrzenie na poziom wykładników. Wtedy po lewej stronie widzimy tysięczną potęgę i postarajmy się uzyskać tysięczną potęgę po stronie prawej. W tym celu przyjmijmy $n=1000k$, co prowadzi do nierówności
$$(1000k)^{1000}<2^{1000k} ,$$
co jest równoważne kolejnym nierównościom
$$(1000k)^{1000}<\left(2^k\right)^{1000} ,$$
$$1000k<2^k .$$

Przez przypadek dostaliśmy taką samą nierówność, co w poprzednim sposobie, ale pamiętajmy, że tym razem związek n i k jest inny. Ponieważ powyższa nierówność jest spełniona dla $k=14$, widzimy, że liczba $n=14000$ spełnia podaną w zadaniu nierówność. Natomiast liczba $n=13000$ odpowiadająca $k=13$ jej nie spełnia.

102. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{7n^5+6n^2-3}{7n^5-4n^3+3} \leqslant D\,.$$

Rozwiązanie:

Aby zrozumieć jak zachowuje się podane wyrażenie, oszacujemy je od góry i od dołu. Nadrzędnym celem jest prostota oszacowań (oczywiście przy spełnieniu wyznaczonego w zadaniu celu).

Zarys strategii szacowania jest następujący:

• szacowania na poziomie licznika wykonamy niezależnie od szacowań na poziomie mianownika,

• zarówno w liczniku jak i w mianowniku, każdy składnik oszacujemy niezależnie od pozostałych,

• każdy składnik postaramy się upodobnić do składnika dominującego: w tym celu wykorzystujemy nierówności

$$0<n^a\leqslant n^b$$

dla $a\leqslant b$.

W liczniku $7n^5+6n^2-3$ dominującym składnikiem jest jednomian zawierający n^5. Ten jednomian pozostawimy bez zmian, a pozostałe oszacujemy przez 0 lub przez n^5 z odpowiednim współczynnikiem. W konsekwencji otrzymujemy nierówności[1]:

$$4n^5=7n^5+0-3n^5 \ \leqslant\ 7n^5+6n^2-3 \ \leqslant\ 7n^5+6n^5-0=13n^5\,.$$

Analogiczne oszacowania przeprowadzimy na poziomie mianownika, pamiętając, że przy szacowania ułamka o dodatnim liczniku i mianowniku, szacowanie od góry wymaga szacowania mianownika od dołu i na odwrót. W konsekwencji otrzymujemy następujące oszacowania:

$$\frac{2}{5}=\frac{7n^5+0-3n^5}{7n^5-0+3n^5}\leqslant\frac{7n^5+6n^2-3}{7n^5-4n^3+3}\leqslant\frac{7n^5+6n^5-0}{7n^5-4n^5+0}=\frac{13}{3}\,.$$

Uzyskaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $C=2/5$ oraz $D=11/3$.

103. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt{4n^2+21n}-\sqrt{4n^2+5n}\leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq0$, otrzymujemy

$$\sqrt{4n^2+21n}-\sqrt{4n^2+5n}=\frac{16n}{\sqrt{4n^2+21n}+\sqrt{4n^2+5n}}=\frac{16}{\sqrt{4+\frac{21}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}}\,.$$

[1] W większości przypadków nierówności są ostre, ale piszę słabe, aby nie odwracać uwagi od głównego celu, jakim jest sprawne wykonanie szacowań.

Szacowanie od dołu (mianownika od góry, czyli n od dołu przez 1) prowadzi do:

$$\frac{16}{\sqrt{4+\frac{21}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}} \geqslant \frac{16}{\sqrt{4+21}+\sqrt{4+5}} = \frac{16}{5+3} = 2 = C\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu, czyli $1/n$ przez 0) prowadzi do:

$$\frac{16}{\sqrt{4+\frac{21}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}} \leqslant \frac{16}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4+0}} = \frac{16}{2+2} = 4 = 2C\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=2$.

Uwaga:

Nietrudno zauważyć, że ciąg $\left(\frac{16}{\sqrt{4+\frac{21}{n}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący, jego pierwszy wyraz jest równy 2, a granica[2] 4. Wynika stąd, że uzyskane przez nas oszacowania są optymalne, w związku z czym w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być $C=2$.

104. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[4]{n^4+80n^3}-n \leqslant 10C\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4+80n^3}-n=\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}\right)^3+n\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}\right)^2+n^2\cdot\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n^3}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}\right)^3+n\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}\right)^2+n^2\cdot\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n^3} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^4}\right)^3+n\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^4}\right)^2+n^2\cdot\sqrt[4]{n^4+80n^4}+n^3}=$$

$$=\frac{80n^3}{27n^3+9n^3+3n^3+n^3}=\frac{80n^3}{40n^3}=2$$

[2] Jeśli nie rozumiesz pojęcia granicy (wystarczy intuicyjne wyczucie, czym jest granica ciągu), pomiń tę uwagę i wróć do niej, gdy zapoznamy się z pojęciem granicy.

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}\right)^3+n\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}\right)^2+n^2\cdot\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n^3}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+0}\right)^3+n\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+0}\right)^2+n^2\cdot\sqrt[4]{n^4+0}+n^3}=\frac{80n^3}{4n^3}=20=10\cdot 2\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=2$.

Sposób II [3]

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez a_n i po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia jak w sposobie I przepisujemy je w postaci

$$a_n=\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}\right)^3+n\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}\right)^2+n^2\cdot\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n^3}=$$

$$=\frac{80}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{80}{n}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{80}{n}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{80}{n}}+1}\,.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n, ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1\leqslant a_n\leqslant\lim_{n\to\infty}a_n\,.$$

Ponieważ $a_1=2$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=20$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=2$.

Sposób III

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4+80n^3}-n=\frac{\sqrt{n^4+80n^3}-n^2}{\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n}=\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^3}+n^2\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^3}+n^2\right)}\geqslant\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^4}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^4}+n^2\right)}=$$

$$=\frac{80n^3}{4n\cdot 10n^2}=\frac{80n^3}{40n^3}=2$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^3}+n^2\right)}\leqslant$$

[3] Jeśli nie znasz pojęcia granicy, pomiń ten sposób i wróć do niego później.

$$\leqslant \frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+0}+n^2\right)}=\frac{80n^3}{2n\cdot 2n^2}=\frac{80n^3}{4n^3}=20=10\cdot 2\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=2$.

Sposób IV[4]

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez a_n i po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia jak w sposobie III przepisujemy je w postaci

$$a_n=\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+80n^3}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^3}+n^2\right)}=\frac{80}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{80}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{80}{n}}+1\right)}\,.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n, ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1\leqslant a_n\leqslant \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Ponieważ $a_1=2$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=20$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=2$.

105. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant \frac{\sqrt{n^2+3}-n}{\sqrt{9n^2+16}-3n}\leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{n^2+3}-n}{\sqrt{9n^2+16}-3n}=\frac{3\cdot\left(\sqrt{9n^2+16}+3n\right)}{16\cdot\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{3\cdot\left(\sqrt{9n^2+16}+3n\right)}{16\cdot\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}\leqslant\frac{3\cdot\left(\sqrt{9n^2+16n^2}+3n\right)}{16\cdot\left(\sqrt{n^2+0}+n\right)}=\frac{3\cdot(5n+3n)}{16\cdot(n+n)}=\frac{3\cdot 8n}{16\cdot 2n}=\frac{3}{4}$$

i od dołu

$$\frac{3\cdot\left(\sqrt{9n^2+16}+3n\right)}{16\cdot\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}\geqslant\frac{3\cdot\left(\sqrt{9n^2+0}+3n\right)}{16\cdot\left(\sqrt{n^2+3n^2}+n\right)}=\frac{3\cdot(3n+3n)}{16\cdot(2n+n)}=\frac{3\cdot 6n}{16\cdot 3n}=\frac{3}{8}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=3/8$.

[4] Jeśli nie znasz pojęcia granicy, pomiń ten sposób i wróć do niego później.