Szacowanie wyrażeń.

81. Oszacować od góry i dołu przez proste wyrażenia różniące się stałym czynnikiem

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\ldots+\sqrt{4n}\,.$$

Rozwiązanie:

Suma ma $3n$ składników, z których każdy szacuje się od dołu przez $\sqrt{n}$ i od góry przez $2\sqrt{n}$. Wobec tego

$$3n\sqrt{n}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\ldots+\sqrt{4n}<6n\sqrt{n}\,.$$

82. Oszacować od góry i dołu przez proste wyrażenia różniące się stałym czynnikiem

$$\sqrt{n^2+n}-n\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

oraz

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{\sqrt{1+3}+1}<\frac{1}{\sqrt{1+1}+1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

83. Oszacować od góry i dołu przez proste wyrażenia różniące się stałym czynnikiem

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n=\frac{n^2}{\left(n^3+n^2\right)^{2/3}+n\cdot\left(n^3+n^2\right)^{1/3}+n^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}+1}$$

oraz

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{4+2+1}=\frac{1}{(1+7)^{2/3}+(1+7)^{1/3}+1}<\frac{1}{(1+1)^{2/3}+(1+1)^{1/3}+1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}+1}<\frac{1}{(1+0)^{2/3}+(1+0)^{1/3}+1}=\frac{1}{3}\,.$$

Nieco subtelniejsze oszacowanie od dołu może wyglądać następująco:

$$\frac{1}{(1+1)^{2/3}+(1+1)^{1/3}+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}>\frac{1}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}+1}=\frac{1}{5}\,.$$

84. Dobierając odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2}-\frac{C}{n}<\sqrt{n^2+n}-n<\frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązanie:
Stosując wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{n^2+n}=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-(n^2+n)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{n^2+n}}=\frac{1/4}{n\cdot\left(1+\frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)},$$

skąd wobec nierówności

$$1+\frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}>2$$

dostajemy dowodzoną nierówność z $C=1/8$.

85. Dobierając odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{3}-\frac{C}{n}<\sqrt[3]{n^3+n^2}-n<\frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie:
Stosując wzór na różnicę sześcianów dokonujemy następujących przekształceń:

$$\left(n+\frac{1}{3}\right)-\sqrt[3]{n^3+n^2}=\frac{\left(n+\frac{1}{3}\right)^3-(n^3+n^2)}{\left(n+\frac{1}{3}\right)^2+\left(n+\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{n^3+n^2}+\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}}=$$

$$=\frac{\frac{n}{3}+\frac{1}{27}}{\left(n+\frac{1}{3}\right)^2+\left(n+\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{n^3+n^2}+\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}}<$$

$$<\frac{\frac{n}{3}+\frac{n}{27}}{(n+0)^2+(n+0)\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+\sqrt[3]{(n^3+0)^2}}=\frac{10n}{27\cdot 3n^2}=\frac{10}{81n}<\frac{10}{80n}=\frac{1}{8n},$$

co kończy dowów podanej nierówności z $C=1/8$.

86. Dobierając odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{4}-\frac{C}{n}<\sqrt[4]{n^4+n^3}-n<\frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie:
Stosując dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\left(n+\frac{1}{4}\right)-\sqrt[4]{n^4+n^3}=\frac{\left(n+\frac{1}{4}\right)^4-(n^4+n^3)}{\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{n^4+n^3}\right)\cdot\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)+\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{3n^2}{8}+\frac{n}{16}+\frac{1}{256}}{\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{n^4+n^3}\right)\cdot\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)+\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)}<$$

$$<\frac{\frac{3n^2}{8}+\frac{n^2}{16}+\frac{n^2}{256}}{\left((n+0)^2+\sqrt{n^4+0}\right)\cdot\left((n+0)+\sqrt[4]{n^4+0}\right)}=\frac{113n^2}{256\cdot 4n^3}=\frac{113}{1024n}<\frac{113}{1017n}=\frac{1}{9n},$$

co kończy dowód danej nierówności z $C=1/9$.