Szacowanie liczb.

Przyjrzyjmy się liczbie 1000! (tysiąc silnia). To bardzo duża liczba. Ma dużo cyfr. Jak dużo? Kilkaset cyfr? A może kilka milionów cyfr? Dopóki będziemy patrzyli na nią jak na znaczki, którymi jest zapisana, nie będziemy mieli wyobrażenia o jej rozmiarze. Postarajmy się ją oszacować od góry i od dołu znajdując odpowiedni kompromis między wysiłkiem włożonym w szacowania i uzyskanymi efektami.

Szacując od góry zauważmy, że 1000! jest iloczynem 1000 czynników, z których każdy jest nie większy od 1000. To prowadzi nas do jednego z prostszych oszacowań, które polega na oszacowaniu[1] wszystkich czynników przez tę samą liczbę. Otrzymamy

$$1000! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000}_{1000 \text{ czynników}} < \underbrace{1000\cdot 1000\cdot 1000\cdot \ldots \cdot 1000\cdot 1000}_{1000 \text{ czynników}} = 1000^{1000} = 10^{3000}\,.$$

Niestety, szacowanie od dołu według tej samej strategii nie daje zadowalającego rezultatu, gdyż wspólne dolne oszacowanie czynników jest równe 1:

$$1000! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000}_{1000 \text{ czynników}} > \underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1\cdot 1}_{1000 \text{ czynników}} = 1\,.$$

Problem polega na tym, że oszacowanie od dołu przez jedynkę dla większości czynników jest stanowczo za grube, zwłaszcza w kontekście iloczynu. Musimy więc przeprowadzić szacowanie odrobinkę subtelniej. W tym celu podzielimy czynniki na dwie grupy według wielkości i w każdej z tych grup z osobna przeprowadzimy szacowanie od dołu. Ponieważ chcemy wiedzieć, ile z grubsza cyfr ma 1000!, będziemy się starali szacować czynniki przez potęgi dziesiątki, a ponieważ szacowania i tak są obarczone sporym błędem, postaramy się użyć w miarę okrągłych liczb jako liczb czynników w poszczególnych grupach.

Jedno z bardziej naturalnych szacowań wygląda następująco:

$$1000! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 99\cdot 100}_{100 \text{ czynników}}\cdot\underbrace{101\cdot 102\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000}_{900 \text{ czynników}} >$$

$$> \underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1\cdot 1}_{100 \text{ czynników}}\cdot\underbrace{100\cdot 100\cdot \ldots \cdot 100\cdot 100}_{900 \text{ czynników}} = 100^{900} = 10^{1800}\,.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$10^{1800} < 1000! < 10^{3000}\,.$$

To oznacza, że liczba 1000! ma co najmniej 1800 cyfr i jednocześnie mniej niż 3000 cyfr. Jest to informacja wystaczająca do tego, abyśmy nie uwierzyli w opowieści o kilkuset cyfrach, czy też o milionach cyfr.

A teraz kilka przykładów szacowań, w których celem jest porównanie dwóch konkretnych liczb. Postaraj się rozwiązać poniższe zadania zanim zajrzysz na następną stronę.

77. Która liczba jest większa: $100!$ czy 10^{200} ?

78. Która liczba jest większa: $\sqrt{26}$ czy $2+\sqrt[3]{26}$?

79. Która liczba jest większa: 3^{1001} czy 5^{666} ?

80. Która liczba jest większa: $\left(\sqrt{17}-4\right)^{23}$ czy $\left(8-3\sqrt{7}\right)^{17}$?

[1]Oczywiście szacowanie iloczynu poprzez szacowanie poszczególnych czynników ma rację bytu tylko wtedy, gdy nie wychodzimy poza liczby dodatnie.

Odpowiedzi.

77. Która liczba jest większa: $100!$ czy 10^{200} ?

Odpowiedź: $100! < 10^{200}$.
Liczba $100!$ jest iloczynem 100 czynników dodatnich, z których 99 jest mniejszych od 100, a jeden jest równy 100. Zatem

$$100! < 100^{100} = 10^{200}\,.$$

78. Która liczba jest większa: $\sqrt{26}$ czy $2+\sqrt[3]{26}$?

Odpowiedź: $\sqrt{26} > 2+\sqrt[3]{26}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących nierówności:

$$\sqrt{26} > \sqrt{25} = 5 = 2+3 = 2+\sqrt[3]{27} > 2+\sqrt[3]{26}\,.$$

79. Która liczba jest większa: 3^{1001} czy 5^{666} ?

Odpowiedź: $3^{1001} > 5^{666}$.
Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań:

$$5^{666} = 25^{333} < 27^{333} = 3^{999} < 3^{1001}\,.$$

80. Która liczba jest większa: $\left(\sqrt{17}-4\right)^{23}$ czy $\left(8-3\sqrt{7}\right)^{17}$?

Rozwiązanie:
Dla każdej z podanych liczb korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów, a następnie wykonujemy szacowania:

$$\left(\sqrt{17}-4\right)^{23} = \left(\frac{17-4^2}{\sqrt{17}+4}\right)^{23} = \left(\frac{1}{\sqrt{17}+4}\right)^{23} < \left(\frac{1}{\sqrt{16}+4}\right)^{23} = \left(\frac{1}{4+4}\right)^{23} = \frac{1}{2^{3\cdot 23}} = \frac{1}{2^{69}}$$

oraz

$$\left(8-3\sqrt{7}\right)^{17} = \left(\frac{8^2-3^2\cdot 7}{8+\sqrt{63}}\right)^{17} = \left(\frac{1}{8+\sqrt{63}}\right)^{17} > \left(\frac{1}{8+\sqrt{64}}\right)^{17} = \left(\frac{1}{8+8}\right)^{17} = \frac{1}{2^{4\cdot 17}} = \frac{1}{2^{68}}\,.$$

Stąd wynika, że

$$\left(\sqrt{17}-4\right)^{23} < \frac{1}{2^{69}} < \frac{1}{2^{68}} < \left(8-3\sqrt{7}\right)^{17}\,.$$

Odpowiedź: $\left(\sqrt{17}-4\right)^{23} < \left(8-3\sqrt{7}\right)^{17}$.