W uzupełnieniu do wczorajszego wykładu wypada podać przekrój Dedekinda definiujący liczbę $\log_2 3$:

$$A=\left\{-\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\cup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\wedge 2^m<3^n\right\},$$

$$B=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\wedge 2^m>3^n\right\}.$$

Porównanie liczby wymiernej m/n z liczbą $\log_2 3$ jest równoważne porównaniu liczb 2^m i 3^n, a więc może być przeprowadzone przy użyciu rachunków na liczbach całkowitych. I tak:
$2^3<3^2$, skąd $\log_2 3>3/2$,
$2^8>3^5$, skąd $\log_2 3<8/5$,
co bardzo szybko dało nam oszacowania

$$1{,}5<\log_2 3<1{,}6\,.$$

A teraz wróćmy do niewymierności liczb zawierających pierwiastki. Dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$ łatwo można przenieść na inne tego typu liczby i udowodnić niewymierność takich liczb jak $\sqrt{15}$ czy $\sqrt[3]{7}$. Zresztą analogiczna uwaga odnosi się do niewymierności logarytmów.

A oto ogólne twierdzenie o niewymierności pierwiastków:

Twierdzenie: Dla każdych liczb naturalnych[1] k, n liczba $\sqrt[k]{n}$ jest całkowita lub niewymierna.

W praktyce oznacza to tyle, że liczba $\sqrt[k]{n}$ jest niewymierna, chyba że pierwiastkowanie daje się wykonać w liczbach całkowitych, jak np. w przypadku $\sqrt{4}$.

Dowód (nie wprost): Załóżmy, że liczba $\sqrt[k]{n}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego a/b, gdzie $b>1$. Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt[k]{n}=\frac{a}{b}\,,$$

$$n=\frac{a^k}{b^k}\,,$$

$$nb^k=a^k\,. \qquad (*)$$

Skoro $b>1$, to liczba b jest podzielna przez pewną liczbę pierwszą p. Wobec tego lewa strona równania $(*)$ jest podzielna przez p, a więc także prawa strona, czyli liczba a^k jest podzielna przez p. Ponieważ a i a^k mają te same dzielniki pierwsze, także liczba a jest podzielna przez p.

Uzyskaliśmy sprzeczność: obie liczby a i b okazały się być podzielne przez p, ale przecież z założenia ułamek a/b jest nieskracalny.

To kończy dowód nie wprost: Liczba $\sqrt[k]{n}$ nie może być niecałkowitą liczbą wymierną.

Często dowody niewymierności polegają na sprowadzeniu problemu do niewymierności pierwiastków, która jest znana na podstawie choćby powyższego twierdzenia.

Popatrzmy na kilka tego typu przykładów.

[1] Czyli całkowitych dodatnich.

33. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$w=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,,$$

$$w^2=2+2\sqrt{6}+3\,,$$

$$\frac{w^2-5}{2}=\sqrt{6}\,,$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna, a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.

34. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$w=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\,,$$

$$w-\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,,$$

$$w^2-2\sqrt{5}+5=2+2\sqrt{6}+3\,,$$

$$w^2-2\sqrt{5}=2\sqrt{6}\,,$$

$$w^2=2\sqrt{5}+2\sqrt{6}\,,$$

$$w^4=20+8\sqrt{30}+24\,,$$

$$\frac{w^4-44}{8}=\sqrt{30}\,,$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna, a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.

35. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$w=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\,,$$

$$w^3=2+3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{6}+3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{6}+3\,,$$

$$w^3=5+3\sqrt[3]{6}\cdot\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\,,$$

$$w^3=5+3\sqrt[3]{6}\cdot w\,,$$

$$\frac{w^3-5}{3w}=\sqrt[3]{6}\,,$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna, a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.