Zadania powtórzeniowe

668. Udowodnić, że równanie
$$10^x = x \cdot 7^x$$
ma co najmniej dwa rozwiązania rzeczywiste.

669. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x \in (0, 2)$ spełniającej nierówność
$$x^{2015} \cdot (x-2)^{2016} > 1\,.$$

670. Udowodnić, że równanie
$$x^{2019} \cdot (x-2)^{2018} = 1$$
ma co najmniej trzy rozwiązania.

671. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność
$$\sin^{2017}(3x) \cdot \sin x > \frac{1}{2}\,.$$

672. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność
$$\sin^{2019}(3x) \cdot \sin(5x) > \frac{1}{2}\,.$$

Spróbuj rozwiązać powyższe zadania zanim zajrzysz na kolejne strony.

Niektóre zadania pomagają w rozwiązaniu następnych. Zatem po przeczytaniu rozwiązania zadania pomyśl, czy nie naprowadza Cię ono na rozwiązanie któregoś z pozostałych zadań.

668. Udowodnić, że równanie

$$10^x = x\cdot 7^x$$

ma co najmniej dwa rozwiązania rzeczywiste.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję pomocniczą $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=10^x - x\cdot 7^x\,.$$

Funkcja ta jest ciągła, a ponadto zachodzą nierówności:

$$f(2)=10^2-2\cdot 7^2=100-98>0\,,$$
$$f(3)=10^3-3\cdot 7^3=1000-3\cdot 343<0$$

oraz

$$f(4)=10^4-4\cdot 7^4=100^2-98^2>0\,.$$

Z własności Darboux funcji ciągłych wynika, że funkcja f przyjmuje wartość 0 w przedziale $(2,3)$ oraz w przedziale $(3,4)$. Pozostaje odnotować, że punkty zerowania się funkcji f są rozwiązaniami równania danego w treści zadania.

669. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x\in(0,2)$ spełniającej nierówność

$$x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}>1\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (dla myślących śmiertelników):

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2015\cdot x^{2014}\cdot(x-2)^{2016}+2016\cdot x^{2015}\cdot(x-2)^{2015}\,.$$

Ponieważ

$$f(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad f'(1)=2015-2016=-1\neq 0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie 1 wartość 1, która nie jest ekstremum lokalnym (bo $f'(1)\neq 0$). W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu jedynki także wartość większą od 1.

Sposób II (dla bezmyślnych cudotwórców):

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}\,.$$

Zamiast wyciągać wnioski na podstawie analizy przebiegu powyższej funkcji, bezmyśnie uczepimy się miejsca, w którym pochodna tej funkcji się zeruje, a sama funkcja osiąga maksimum.

Pochodna funkcji f wyraża się wzorem

$$f'(x)=2015\cdot x^{2014}\cdot(x-2)^{2016}+2016\cdot x^{2015}\cdot(x-2)^{2015}=$$
$$=2015\cdot x^{2014}\cdot(2-x)^{2016}-2016\cdot x^{2015}\cdot(2-x)^{2015}=$$

$$=x^{2014}\cdot(2-x)^{2015}\cdot(2015\cdot(2-x)-2016\cdot x)=x^{2014}\cdot(2-x)^{2015}\cdot(4030-4031\cdot x)\ .$$

Zatem na przedziale $(0, 2)$ pochodna funkcji f ma następujący znak:

$$f'(x)\begin{cases}>0 & \text{dla} \quad x\in\left(0,\,\frac{4030}{4031}\right)\\ =0 & \text{dla} \quad x=\frac{4030}{4031}\\ <0 & \text{dla} \quad x\in\left(\frac{4030}{4031},\,2\right)\end{cases}$$

Oznacza to, że funkcja f osiąga na przedziale $(0, 2)$ największą wartość w punkcie $x=\frac{4030}{4031}$ i wartością tą jest

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)=\left(\frac{4030}{4031}\right)^{2015}\cdot\left(\frac{4032}{4031}\right)^{2016}=\frac{4030^{2015}\cdot 4032^{2016}}{4031^{4031}}\ .$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy "tylko" udowodnić nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right)>1$. Problem polega na tym, że w rzeczywistości $f\left(\frac{4030}{4031}\right)\approx 1{,}000124$.

Aby wykazać nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right)>1$, należałoby udowodnić, że

$$4030^{2015}\cdot 4032^{2016}>4031^{4031}\,, \qquad (\clubsuit)$$

co jest praktycznie niewyobrażalne bez użycia komputera, gdyż po obu stronach tej nierówności występują liczby 14534-cyfrowe, a ich iloraz jest w przybliżeniu równy $1{,}000124$.

Cudotwórca przepisałby nierówność $(\clubsuit)$ w postaci

$$(2n)^n\cdot(2n+2)^{n+1}>(2n+1)^{2n+1}\,,$$

gdzie $n=2015$, a następnie przemnożył ją stronami przez $2n$ otrzymując kolejno nierówności równoważne:

$$(2n)^{n+1}\cdot(2n+2)^{n+1}>(2n+1)^{2n+1}\cdot(2n)\,,$$

$$((2n)\cdot(2n+2))^{n+1}>\left((2n+1)^2\right)^n\cdot(2n+1)\cdot(2n)\,,$$

$$\left(4n^2+4n\right)^{n+1}>\left(4n^2+4n+1\right)^n\cdot\left(4n^2+2n\right)\ . \qquad (\diamondsuit)$$

W tym momencie cudotwórca zauważyłby, że po każdej ze stron nierówności $(\diamondsuit)$ znajduje się iloczyn $n+1$ czynników dodatnich. Gdyby sumy czynników po każdej ze stron były równe, większy byłby iloczyn o wszystkich czynnikach równych, czyli iloczyn po lewej stronie nierówności $(\diamondsuit)$. Tymczasem jest nawet lepiej, gdyż suma czynników po lewej stronie nierówności $(\diamondsuit)$ jest równa

$$\left(4n^2+4n\right)\cdot(n+1)=4n^3+8n^2+4n\,,$$

a po prawej jest od niej mniejsza i wynosi

$$\left(4n^2+4n+1\right)\cdot n+\left(4n^2+2n\right)=4n^3+8n^2+3n\,.$$

Dowód nierówności $(\clubsuit)$ jest więc zakończony.

Uwaga:

Cudotwórca zamiast nierówności $(\diamondsuit)$ udowodniłby nierówność mocniejszą, a mianowicie

$$\left(4n^2+4n\right)^{n+1}>\left(4n^2+4n+1\right)^n\cdot\left(4n^2+3n\right)\,,$$

co prowadzi do wzmocnionej wersji nierówności $(\clubsuit)$:

$$4030^{2015}\cdot 4032^{2016}>4031^{4030}\cdot 4031{,}5\,,$$

w której iloraz strony lewej do prawej jest w przybliżeniu równy 1,00000000769 (bezpośrenio po przecinku występuje osiem zer). To doprowadziłoby do nierówności

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)>\frac{4031,5}{4031}=1+\frac{1}{8062}\approx\mathbf{1,0001240}387\,,$$

gdy tymczasem w rzeczywistości

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)\approx\mathbf{1,0001240}463\,.$$

670. Udowodnić, że równanie

$$x^{2019}\cdot(x-2)^{2018}=1$$

ma co najmniej trzy rozwiązania.

Rozwiązanie:

Niech

$$f(x)=x^{2019}\cdot(x-2)^{2018}\,.$$

Zauważmy, że $f(1)=1$ oraz

$$f'(x)=2019\cdot x^{2018}\cdot(x-2)^{2018}+2018\cdot x^{2019}\cdot(x-2)^{2017}=$$
$$=(2019(x-2)+2018x)\cdot x^{2018}\cdot(x-2)^{2017}\,,$$

skąd $f'(1)=1$.

Stąd wynika, że funkcja f przyjmuje wartości większe od 1 w prawostronnym otoczeniu jedynki, a ponieważ $f(2)=0$, na mocy własności Darboux funkcji ciągłych wnioskujemy, że f przyjmuje wartość 1 w przedziale $(1\,,2)$.

Pozostaje zauważyć, że $f(3)>1$, wobec czego funkcja f przyjmuje wartość 1 w przedziale $(2,\,3)$.

Wobec tego f przyjmuje wartość 1 co najmniej trzykrotnie: w punkcie 1, w przedziale $(1\,,2)$ i w przedziale $(2,\,3)$.

671. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2017}(3x)\cdot\sin x>\frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sin^{2017}(3x)\cdot\sin x\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2017\cdot\sin^{2016}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot3\cdot\sin x+\sin^{2017}(3x)\cdot\cos x=$$
$$=6051\cdot\sin^{2016}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot\sin x+\sin^{2017}(3x)\cdot\cos x\,.$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=6051\cdot\sin^{2016}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sin^{2017}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=6051\cdot1\cdot0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/6$ wartość $1/2$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/6)\neq0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/6$ także wartość większą od $1/2$.

Uwaga:

Ponieważ $f'(\pi/6)>0$, funkcja f ma maksimum lokalne (i jak się okazuje, globalne) na prawo od $\pi/6$. Jednak dokładniejsze jego zbadanie bez użycia komputera okazuje się niezwykle trudne. Pochodna funkcji f zeruje się bowiem w punkcie (w przybliżeniu) $\frac{\pi}{6}+0,0000954$, a sama funkcja f osiąga tam maksimum w przybliżeniu równe $0,5000413$. Jest to wartość tak nieznacznie przekraczająca $1/2$, że niewyobrażalne wydaje się rozwiązanie zadania przez bezpośrednie szacowanie wartości funkcji f w konkretnym punkcie.

Jeśli posuniemy się nieco dalej na prawo od punktu $\pi/6$, zobaczymy, że funkcja f dosyć szybko maleje, mamy na przykład

$$f\left(\frac{\pi}{6}+0,001\right)\approx0,49634$$

oraz

$$f\left(\frac{\pi}{6}+0,01\right)\approx0,20519\,.$$

672. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2019}(3x)\cdot\sin(5x)>\frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sin^{2019}(3x)\cdot\sin(5x)\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2019\cdot\sin^{2018}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot3\cdot\sin(5x)+\sin^{2019}(3x)\cdot\cos(5x)\cdot5=$$
$$=6057\cdot\sin^{2018}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot\sin(5x)+5\cdot\sin^{2019}(3x)\cdot\cos(5x)\,.$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=6057\cdot\sin^{2018}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}+5\cdot\sin^{2019}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}=$$
$$=6057\cdot1\cdot0\cdot\frac{1}{2}+5\cdot1\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{5\sqrt{3}}{2}\neq0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/6$ wartość $1/2$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/6)\neq0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/6$ także wartość większą od $1/2$.