Zadania powtórzeniowe

641. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz $D\leqslant 11C$ i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C\leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant D\,.$$

642. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$n^{n+1}>(n+1)^n\,.$$

643. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n+3^{2n}}{9^n}+\frac{5^{n+1}+3^{2n-1}}{9^{n-1}\cdot 25}+\frac{5^{n+2}+3^{2n-2}}{9^{n-2}\cdot 25^2}+\ldots+\frac{5^{n+k}+3^{2n-k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}+\ldots+\frac{5^{2n}+3^n}{25^n}\right).$$

644. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{2n}+7^{2n}}{7^{2n}}+\frac{2^{2n+2}+7^{2n-1}}{2^4\cdot 7^{2n-2}}+\frac{2^{2n+4}+7^{2n-2}}{2^8\cdot 7^{2n-4}}+\ldots+\frac{2^{2n+2k}+7^{2n-k}}{2^{4k}\cdot 7^{2n-2k}}+\ldots+\frac{2^{4n}+7^n}{2^{4n}}\right).$$

Spróbuj rozwiązać powyższe zadania zanim zajrzysz na kolejne strony.

641. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz $D\leqslant 11C$ i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C\leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant D\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (rzemieślniczy, ale skuteczny):

Dla liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $|x|\geqslant 1$ wykonujemy standardowe szacowania od góry i od dołu oparte na nierównościach $0\leqslant 1\leqslant x^{2014}$:

$$\frac{1}{11}=\frac{x^{2014}+0}{8x^{2014}+3x^{2014}}\leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant \frac{x^{2014}+2x^{2014}}{8x^{2014}+0}=\frac{3}{8}\,.$$

Z kolei dla liczb x spełniających nierówność $|x|<1$ analogiczne szacowanie musi uwzględniać odwrócenie kierunku nierówności między potęgami liczby x, gdyż wtedy zachodzą nierówności $0\leqslant x^{2014}\leqslant 1$. Szacowania wyglądają wówczas następująco:

$$\frac{2}{11}=\frac{0+2}{8+3}\leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant \frac{1+2}{0+3}=1\,.$$

Z powyższych oszacowań wynikają nierówności

$$C\leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant D\,,$$

gdzie $C=\min(1/11,\,2/11)=1/11$ oraz $D=\max(3/8,\,1)=1=11C$.

Sposób II (nieco trikowy i prostszy rachunkowo, ale trudny do zastosowania dla bardziej skomplikowanych wyrażeń):

Wykonujemy szacowania na poziomie licznika w taki sposób, aby w liczniku otrzymać współczynniki proporcjonalne do współczynników w mianowniku:

$$\frac{1}{8}=\frac{x^{2014}+\frac{3}{8}}{8x^{2014}+3}\leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant \frac{\frac{16}{3}x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}=\frac{2}{3}\,.$$

Z powyższych oszacowań wynikają nierówności

$$C\leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant D\,,$$

gdzie $C=1/8$ oraz $D=2/3=\frac{16}{3}C<11C$.

Sposób III (analogiczny do sposobu II, tylko szacujemy mianownik zamiast licznika):

Wykonujemy szacowania na poziomie mianownika w taki sposób, aby w mianowniku otrzymać współczynniki proporcjonalne do współczynników w liczniku:

$$\frac{1}{8}=\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+16}\leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant \frac{x^{2014}+2}{\frac{3}{2}x^{2014}+3}=\frac{2}{3}\,,$$

co prowadzi do identycznych oszacowań jak w sposobie II.

Sposób IV (w duchu podobny do sposobów II i III, ale trochę bardziej naturalny i dający pełną kontrolę nad zbiorem wartości danego wyrażenia):

Przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci zawierającej zmienną x tylko w jednym miejscu:

$$\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}=\frac{x^{2014}+\frac{3}{8}+\frac{13}{8}}{8x^{2014}+3}=\frac{1}{8}+\frac{\frac{13}{8}}{8x^{2014}+3}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Mianownik ostatniego składnika przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[3,\,+\infty)$, a zatem iloraz $\dfrac{13/8}{8x^{2014}+3}$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(0,\,13/24]$. W konsekwencji zbiór możliwych wartości wyrażenia ($\clubsuit$) jest przedziałem $(1/8,\,2/3]$.

Zatem zachodzą nierówności

$$\frac{1}{8}<\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant\frac{2}{3}\,,$$

których nie można poprawić.

Rozwiązanie jest zakończone ze stałymi C i D jak w sposobach II i III.

642. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$n^{n+1}>(n+1)^n\,.$$

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu nierówność jest równoważna nierówności

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}\,,$$

czyli

$$f(n)>f(n+1)\,, \qquad (*)$$

gdzie

$$f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{1/x}\,.$$

Ponieważ jednak

$$f'(x)=x^{1/x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x^{1/x}=x^{1/x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\ln x}{x}=\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}<0 \qquad \text{dla} \qquad x>e\,,$$

funkcja f jest malejąca w przedziale $(e,\,+\infty)$, skąd otrzymujemy $(*)$ dla $n\geqslant 3$.

643. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n+3^{2n}}{9^n}+\frac{5^{n+1}+3^{2n-1}}{9^{n-1}\cdot 25}+\frac{5^{n+2}+3^{2n-2}}{9^{n-2}\cdot 25^2}+\ldots+\frac{5^{n+k}+3^{2n-k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}+\ldots+\frac{5^{2n}+3^n}{25^n}\right).$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy wyrażenie pod znakiem granicy w postaci sumy dwóch postępów geometrycznych, obliczamy ich sumy, a następnie przechodzimy do granicy:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{5^{n+k}+3^{2n-k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{5^{n+k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{2n-k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{9}\right)^n\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{25}\right)^k=$$

$$=\left(\frac{5}{9}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{9}{5}-1}+\frac{\left(\frac{3}{25}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{25}-1}=\frac{\frac{9}{5}-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{4/5}+\frac{\left(\frac{3}{25}\right)^{n+1}-1}{-22/25}\;\to\;\frac{9/5}{4/5}+\frac{-1}{-22/25}=$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{25}{22}=\frac{99+50}{44}=\frac{149}{44}\,.$$

644. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{2n}+7^{2n}}{7^{2n}}+\frac{2^{2n+2}+7^{2n-1}}{2^4\cdot 7^{2n-2}}+\frac{2^{2n+4}+7^{2n-2}}{2^8\cdot 7^{2n-4}}+\ldots+\frac{2^{2n+2k}+7^{2n-k}}{2^{4k}\cdot 7^{2n-2k}}+\ldots+\frac{2^{4n}+7^n}{2^{4n}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy wyrażenie pod znakiem granicy w postaci sumy dwóch postępów geometrycznych, obliczamy ich sumy, a następnie przechodzimy do granicy:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2n+2k}+7^{2n-k}}{2^{4k}\cdot 7^{2n-2k}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2n+2k}}{2^{4k}\cdot 7^{2n-2k}}+\sum_{k=0}^{n}\frac{7^{2n-k}}{2^{4k}\cdot 7^{2n-2k}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{49}\right)^n\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{7}{16}\right)^k=$$

$$=\left(\frac{4}{49}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{49}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{49}{4}-1}+\frac{\left(\frac{7}{16}\right)^{n+1}-1}{\frac{7}{16}-1}=\frac{\frac{49}{4}-\left(\frac{4}{49}\right)^n}{45/4}+\frac{\left(\frac{7}{16}\right)^{n+1}-1}{-9/16}\;\to\;\frac{49/4}{45/4}+\frac{-1}{-9/16}=$$

$$=\frac{49}{45}+\frac{16}{9}=\frac{49+80}{45}=\frac{129}{45}=\frac{43}{15}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 43/15.