Liczby wymierne.

Zanim wyjaśnimy sobie, czym są liczby rzeczywiste, wyobraźmy sobie, że żyjemy w świecie, w którym są tylko liczby wymierne. Dla celów opisu otaczającej nas rzeczywistości i występujących w niej wielkości fizycznych, liczby wymierne to znacznie więcej niż potrzebujemy. W zupełności wystarczyłyby nam liczby wymierne o mianowniku będącym potęgą dziesiątki, czyli ułamki dziesiętne skończone. A tak naprawdę to ułamki o 10..., no może 20..., a co mi tam, nich będzie 50 cyfrach znaczących, z naddatkiem by nam wystarczyły.

Liczby wymierne stanowią więc nieporównanie większe bogactwo niż to, co możemy zaobserwować i zmierzyć w otaczającym nas świecie. Mając do dyspozycji liczby wymierne, czegóż chcieć więcej? Liczby wymierne możemy przedstawić jako odpowiednio rozmieszczone punkty na prostej — wymiernej osi liczbowej. Czy czegoś tam brakuje? Ależ skąd, przecież każdy pyłek kredy, czy każda mikrokropelka atramentu, czy każdy atom, proton czy kwark na tak narysowanej prostej zawiera nieskończenie wiele liczb wymiernych. W realnym świecie nie tylko nie ma na tej prostej dziur, ale nawet rozdzielczość rysunku jest nieskończenie niewystarczająca, aby wszytskie liczby wymierne rozróżnić.

Zapytajmy w tymże świecie liczb wymiernych o rozwiązanie następującego problemu: Jaka jest długość przekątnej kwadratu o boku 1? Empirycznie można byłoby taki kwadrat narysować i z ogromną dokładnością zmierzyć długość jego przekątnej. Bez względu na to, jak duża byłaby to dokładność, liczb wymiernych odpowiednio dobrze przybliżających długość przekątnej byłoby nieskończenie wiele, choćbyśmy tę długość chcieli zmierzyć co do kwarka. Ale zajmijmy się tym zagadnieniem czysto teoretycznie i zapytajmy: Któraż to liczba wymierna[1] dokładnie oddaje długość przekątnej kwadratu o boku 1?

Jeśli przez x oznaczymy długość przekątnej kwadratu o boku 1, to z twierdzenia Pitagorasa szybko otrzymamy równanie

$$x^2 = 2\,.$$

które ta tajemnicza liczba x spełniać musi. Liczba x, jako długość odcinka, jest dodatnia, a jako liczba wymierna[2] daje się zapisać w postaci ułamka nieskracalnego m/n, gdzie m, n są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Mamy więc równość

$$\frac{m^2}{n^2} = 2\,,$$

czyli

$$m^2 = 2n^2\,.$$

Skoro prawa strona powyższego równania jest parzysta, to równa jej strona lewa, czyli m^2, też jest liczbą parzystą. A ponieważ parzystość liczby jest taka sama jak parzystość jej kwadratu, parzysta jest sama liczba m. Aby tę własność parzystości liczby m

[1] Bo przypominam, że w rozważanym przez nas świecie liczb innych niż wymierne nie ma, ani też istnienia takich liczb nie mamy powodu podejrzewać.

[2] Wszystkie liczby są wymierne! Przynajmniej tak nam się na razie wydaje.

wkomponować w rozważane równanie, przyjmijmy $m=2k$, gdzie k jest liczbą naturalną. Otrzymamy

$$4k^2=2n^2\ ,$$

skąd

$$2k^2=n^2\ .$$

Rozumując jak poprzednio, dochodzimy do wniosku, że liczba n^2 jest parzysta, a w konsekwencji parzysta jest sama liczba n.

Podsumujmy, co otrzymaliśmy:
- ułamek m/n jest nieskracalny,
- licznik m jest parzysty,
- mianownik n jest parzysty.

Powyższe trzy własności są ze sobą sprzeczne, bo ułamek o parzystym liczniku i parzystym mianowniku nie jest nieskracalny. Do sprzeczności tej doprowadziło nas przypuszczenie, że istnieje liczba wymierna, której kwadrat jest równy 2.

Wniosek:

Nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat jest równy 2.

Co to oznacza? Że pozostając w świecie liczb wymiernych musimy się pogodzić z nieznośną prawdą: Nie istnieje liczba, która wyrażałaby długość przekątnej kwadratu o boku 1. Jest to jednak nieakceptowalne. Dlatego do zbioru liczb wymiernych taką liczbę dołączymy.

Jak to zrobić? Najprościej na gruncie czystej algebry, czyli w oparciu o 4 działania[3]. Do świata liczb wymiernych dokładamy taką liczbę x, która podlega wszelkim znanym nam prawidłom rachunkowym, a ponadto spełnia równanie $x^2=2$. Czyli kiedykolwiek w rachunkach pojawi się x^2, możemy je zamienić na 2.

To powoduje jednak probemy dwojakiego rodzaju. Po pierwsze, hipotetyczna liczba x zdefiniowana na gruncie czystej algebry równością $x^2=2$ nie jest jednoznacznie wyznaczona, w tym sensie, że liczba $-x$ też ma własność $(-x)^2=2$. I nie da się zapisać przy użyciu czterech działań żadnej własności liczby x, która by ją od liczby $-x$ odróżniała. To jeszcze byśmy jakoś przeżyli.

Ale po drugie: zamiast pytać o przekątną kwadratu o boku 1, moglibyśmy zapytać o długość okręgu o średnicy 1. Jednak w tym przypadku czysta algebra nie daje nam możliwości sformułowania własności hipotetycznej liczby, która by taką długość okręgu wyrażała. A dokładniej: nie istnieje równanie wielomianowe o współczynnikach wymiernych, które by taką liczbę definiowało.

Liczbę określającą długość przekątnej kwadratu jednostkowego można zdefiniować na gruncie analizy. Analizy, to znaczy struktury liczb wymiernych, w której mamy nie tylko 4 działania, ale także możliwość porównywania liczb.

Długość przekątnej kwadratu możemy próbować mierzyć liczbami wymiernymi. Dokładnie to się nie uda, ale każda taka próba powie nam, czy dana liczba wymierna jest

[3]Dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie.

za mała, czy za duża na to, aby wyrażać długość przekątnej kwadratu. Opiera się to na spostrzeżeniu, że czym większa liczba wymierna dodatnia, tym większy jej kwadrat.

Zbiór liczb wymiernych za małych na to, aby wyrażać długość przekątnej, to liczby ujemne, zero oraz dodatnie liczby wymierne, których kwadrat jest mniejszy[4] od 2:

$$A=\left\{-\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\cup\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\wedge m^2<2n^2\right\}.$$

Z kolei liczby wymierne za duże na to, aby wyrażać długość przekątnej tworzą zbiór:

$$B=\left\{\frac{m}{n}:\ m,n\in\mathbb{N}\wedge m^2>2n^2\right\}.$$

Tym samym każdą liczbę wymierną zakwalifikowaliśmy do dokładnie jednego ze zbiorów A i B, a przy tym każdy element zbioru A jest mniejszy od każdego elementu zbioru B.

Zbiór liczb wymiernych rozpada się więc na dwa zbiory: liczby duże (B) i małe (A). Na wymiernej osi liczbowej na styku zbiorów A i B jest dziura. Zbiory A i B wyznaczają na wymiernej osi liczbowej pewne miejsce, ale tam nic nie ma, nie ma tam żadnej liczby wymiernej. W tym miejscu chcielibyśmy umieścić $\sqrt{2}$, czyli liczbę dodatnią, która rozgranicza liczby wymierne dodatnie o kwadracie mniejszym od 2 od liczb wymiernych dodatnich o kwadracie większym od 2.

Liczbę $\sqrt{2}$ możemy więc zdefiniować przez wskazanie miejsca na liczbowej osi wymiernej, gdzie liczba ta powinna się znaleźć. Podobnie można byłoby uczynić z liczbą π. Odpowiednie rozważania geometryczne (przynajmniej w teorii) pozwoliłyby dla każdej liczby wymiernej odpowiedzieć na pytanie, czy ma być ona mniejsza czy większa od π. Zbiór liczb wymiernych rozpadłby się wówczas na dwa zbiory: zbiór[5] A_π liczb, które są za małe, aby być liczbą π oraz zbiór B_π złożony z liczb, które na bycie liczbą π są za duże. Na styku zbiorów A_π i B_π oś liczb wymiernych ma dziurę, w której powinna się znaleźć liczba π.

O liczbach niewymiernych możemy więc myśleć jak o dziurach w wymiernej osi liczbowej, które to dziury są zlokalizowane przez rozbicie[6] zbioru liczb wymiernych na dwa niepuste rozłączne zbiory A i B o tej własności, że każdy element zbioru A jest mniejszy od każdego elementu zbioru B. Przy tym liczbę niewymierną otrzymamy tylko wtedy, gdy na styku zbiorów A i B naprawdę jest dziura, czyli zbior A nie ma elementu największego, a zbiór B nie ma elementu najmniejszego. W przeciwnym razie wskazane przez te zbiory miejsce byłoby zajęte przez liczbę wymierną. Na przykład przekrój Dedekinda

$$A=(-\infty,1),\qquad B=[1,\infty)$$

wskazuje na liczbę 1. Podobnie zresztą jak przekrój

$$A=(-\infty,1],\qquad B=(1,\infty).$$

[4]Zauważmy, że nierówność $\left(\frac{m}{n}\right)^2<2$ jest równoważna nierówności $m^2<2n^2$, a więc daje się wyrazić przez operacje na liczbach całkowitych zastosowane do licznika i mianownika rozważanej liczby wymiernej.

[5]W zasadzie mógłbym nazwać ten zbiór A, ale nie chcę tworzyć fałszywego wrażenia, że jest on równy zbiorowi A zdefiniowanemu poprzednio.

[6]Parę zbiorów (A,B) o wymienionych własnościach nazywamy przekrojem Dedekinda zbioru liczb wymiernych.

Liczby rzeczywiste.

Jaka własność odróżnia zbiór liczb rzeczywistych od zbioru liczb wymiernych? Otóż zbiór liczb rzeczywistych nie ma dziur. To znaczy, że tworząc przekrój Dedekinda zbioru liczb rzeczywistych nigdy nie trafimy na dziurę, której zatkanie wymagałoby stworzenia nowej liczby rzeczywistej.

Pewnik Dedekinda (aksjomat ciągłości):

Jeżeli A i B są takimi niepustymi zbiorami, że

- $A\cup B=\mathbb{R}$,
- $A\cap B=\emptyset$,
- dla każdego $a\in A$ i każdego $b\in B$ zachodzi nierówność $a<b$,

to

zbiór A ma element największy

ALBO

zbiór B ma element najmniejszy.

Liczba rzeczywista jest wyznaczona przez przekrój Dedekinda zbioru liczb wymiernych, bo taki przekrój wskazuje miejsce na osi liczbowej. Ten sam efekt można uzyskać podając nieskończony[7] ułamek dziesiętny, gdyż jego znajomość pozwala porównać reprezentowaną przez niego liczbę rzeczywistą z jakąkolwiek liczbą wymierną.

A oto podstawowy fakt dotyczący nieskończonych ułamków dziesiętnych odpowiadających liczbom wymiernym:

Liczba jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający jej ułamek dziesiętny jest okresowy (okres nie musi zaczynać się zaraz po przecinku).

Na przykład liczba $0,(9)=0{,}99999\ldots$ jest wymierna. No to skoro jest wymierna, to ile jest równa? Jeśli ktoś tego nie widzi od razu, to może tę liczbę oznaczyć przez x i przemnożyć przez 10 przesuwając cyfry w lewo o jedną pozycję, a następnie wykonać odejmowanie:

$$\begin{aligned} 10x &= 9,(9) \\ x &= 0,(9) \\ 9x &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Zatem $0,(9)=1$. Na pierwszy rzut oka wydaje się to dziwne, bo nigdy nie mamy potrzeby[8] używania zapisu $0,(9)$, więc nie jesteśmy z nim oswojeni. Jednak obydwa zapisy liczby 1 są legalne.

Zapamiętaj: Prawie każda liczba rzeczywista ma jednoznaczne przedstawienie w postaci nieskończonego ułamka dziesiętnego. Wyjątkiem są liczby wymierne mające skończone[9] rozwinięcie dziesiętne. Wówczas możemy ostatnią cyfrę rozwinięcia zmniejszyć o 1 i zrekompensować to nieskończonym ciągiem dziewiątek, np. $0{,}37=0{,}36(9)$.

[7] Każdy ułamek dziesiętny można uznać za nieskończony, jeśli umówimy się, że ułamki skończone uzupełniamy nieskończonym ciągiem zer.

[8] A nawet odradzam używania tej postaci w życiu codziennym. Na przykład poproszenie w sklepie o $0,(9)$ bochenka chleba nie jest najlepszym pomysłem.

[9] Przypominam, że rozwinięcie skończone możemy uznać za uproszczony zapis rozwinięcia nieskończonego, gdzie pomijamy nieskończenie wiele zer.